Carpeta de Matemática 1
Nueva edición
ampliada y actualizada

CUADERNILLO 2

Nueva carpeta de Matemática IV

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa
Nora Legorburu - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

2. Funciones 3
Revisión inicial 4
Funciones 5
Dominio e imagen de una función 7
Clasificación de funciones 8
Composición de funciones 9
Función inversa 10
Crecimiento, decrecimiento y extremos 12
Conjuntos de positividad y de negatividad.
Ceros de una función 13
En el mundo real 15
La medición de audiencia o *rating* televisivo 15
La fotografía digital y los megapíxeles 16
Más actividades 17
Autoevaluación 18

3. Funciones lineales y progresiones aritméticas 19
Revisión inicial 20
El modelo lineal 21
La función lineal 22
La ecuación de la recta 24
Rectas paralelas 26
Rectas perpendiculares 27
Algunas funciones especiales 28
La función constante 28
La función identidad 28
Funciones definidas por tramos lineales 29
La función módulo 31
La función parte entera 33
La función signo 33
Las sucesiones numéricas 34
Progresiones aritméticas 37
La suma de los primeros *n* términos de una sucesión aritmética 39
Modelos de crecimiento aritmético 40
En el mundo real 41
Progresiones e inversiones 41
Funciones lineales y zoología 42
Más actividades 43
Autoevaluación 46
Actividades integradoras 47

AIQUE

Este CUADERNILLO 2 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática IV.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

COPIEDICIÓN
Maricel Besse

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
María Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Estudio DOBLEVUELO

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Ivana Dodero en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que prevé la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0076-3
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada, por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético, sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores viola derechos reservados, es ilegal, y constituye un delito.

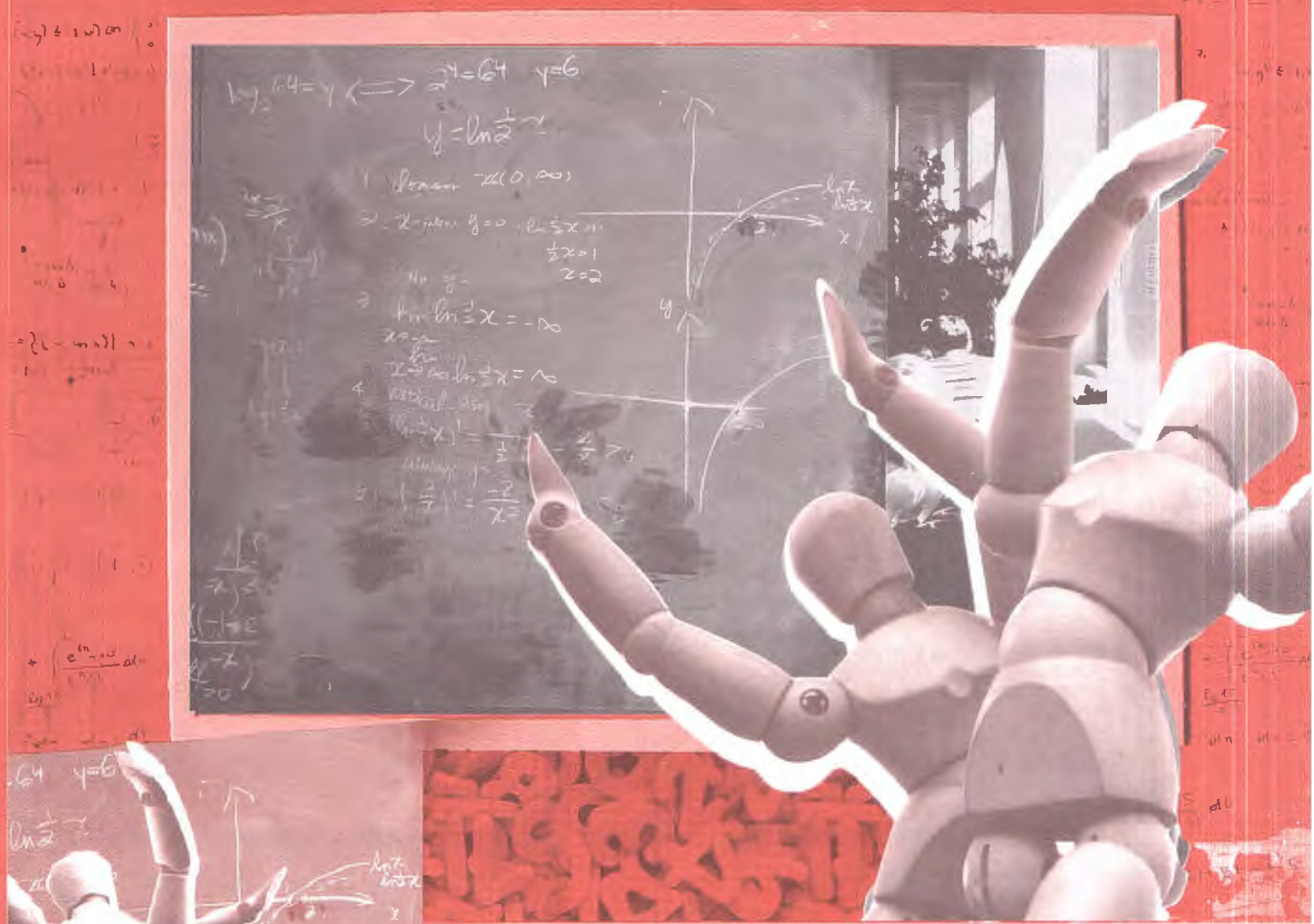
Nueva carpeta de matemática I. [Carlos Abdala...[et.al.]. ; adaptado por Ruth Schaposchnik. - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
192 p. ; 28x20 cm.

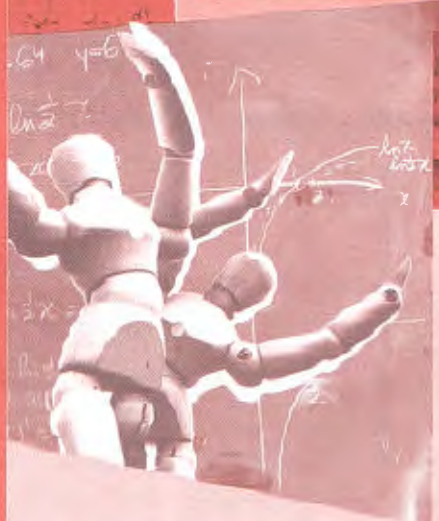
ISBN 978-987-06-0076-3

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, adapt.
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en marzo de 2008 en Latingráfica. Rocamora 4161. Ciudad de Buenos Aires.

2 FUNCIONES



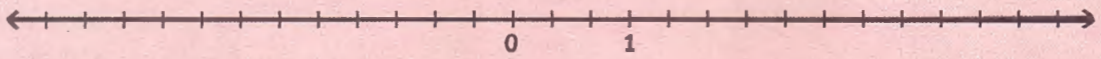


En el desarrollo de las aplicaciones matemáticas a problemas prácticos y en toda situación donde interese mostrar los resultados obtenidos mediante un lenguaje matemático, como los informes económicos o científicos, se utilizan *funciones*. Frecuentemente, las relaciones entre esos fenómenos se presentan en forma gráfica.

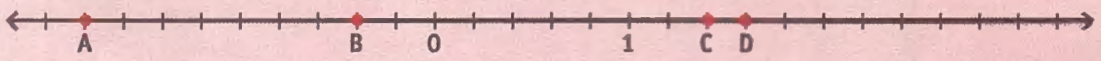
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Sobre la recta siguiente, ubiquen los puntos que corresponden a los siguientes valores: 4; $-1{,}5$; $\frac{2}{3}$; $-2{,}\widehat{3}$; $\frac{3}{2}$.

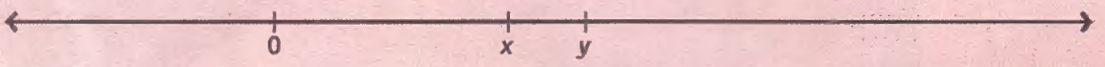


2 Indiquen el valor que corresponde a los puntos marcados sobre la recta con las letras A, B, C y D.

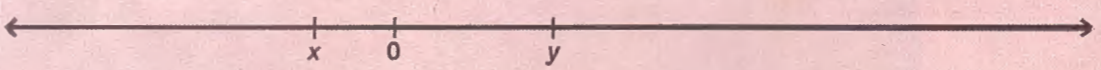


3 Conociendo la ubicación correspondiente a x e y, en cada caso, marquen en la recta los puntos que corresponden a $2x$; $x+y$; $x-y$; $y-x$; $y:2$; $(x+y):2$.

a)



b)



4 ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones representan la relación entre las variables de la tabla?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-2	0	2	4	6	8	10

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2(x + 1)$ c) $x = \frac{y-2}{2}$ d) $2y + 2 = x$

5 En el gráfico, marquen el vértice restante de la figura que se pide, en cada caso, e indiquen sus coordenadas.

a) ABCD es un paralelogramo.

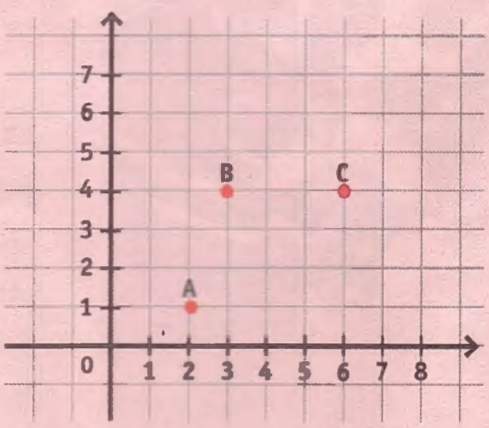
.....

b) ABCE es un trapecio rectángulo.

.....

c) ABCF es un trapecio isósceles.

.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones

6 Un cartel como el de la figura está colocado sobre una de las paredes de un autoservicio.

a) Completen las tablas que representan el precio que se paga en función de la cantidad de mercadería que se compra en ese lugar.

Naranjas

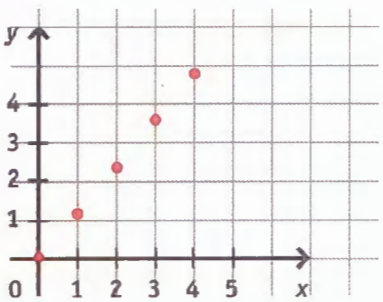
Peso (kg)		1		2		3
Precio ($)	0,60		1,80		3	

Alcauciles

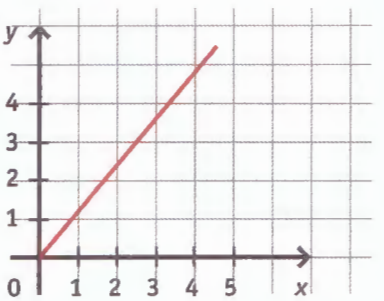
Unidades		2			5	
Precio ($)	1,20		3,60	4,80		7,20

b) Identifiquen el gráfico cartesiano que corresponde a cada una de las ofertas anteriores. Justifiquen su respuesta.

I.



II.



Para leer y recordar

- Una *función* definida entre dos conjuntos de números reales, *A* y *B*, es una relación que asigna, a cada uno de los elementos *x* de *A*, uno y sólo un elemento *y* de *B*.

La expresión $f : A \longrightarrow B$ se lee "la función *f* definida de A en B".

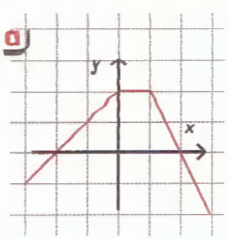
- Los dos conjuntos numéricos se asocian a dos variables. Los elementos *x* constituyen la *variable independiente* y los elementos *y*, la *variable dependiente*.

La expresión $f(x) = y$ se lee "*f de x es y*". Decimos que *y* es la *imagen* de *x*, o que *x* es una *preimagen* de *y* a través de la función *f*.

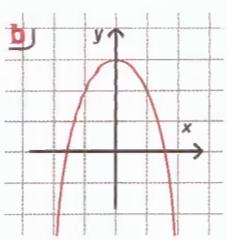
- Una función puede representarse mediante una tabla, una gráfica y, en muchos casos, mediante una fórmula.
- Para representar gráficamente una función, se ubican los valores de la variable independiente sobre el eje de abscisas y los de la variable dependiente, sobre el eje de ordenadas.

7 Algunas de las siguientes gráficas corresponden a funciones; y otras, no. Indiquen cuáles de ellas no corresponden a funciones y expliquen por qué.

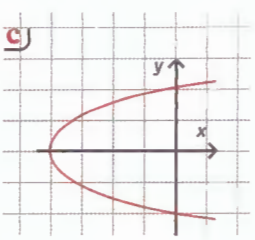
a)



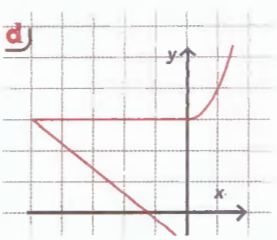
b)



c)



d)

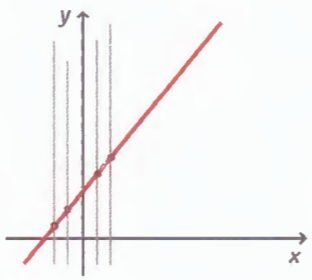


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

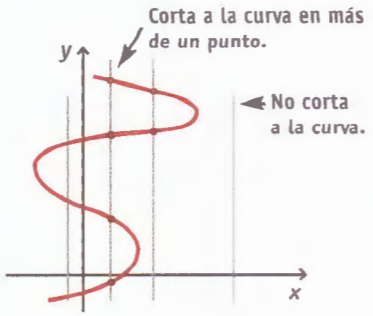
Para observar

- Una forma de determinar si cierta gráfica puede ser la representación de una función consiste en trazar rectas verticales sobre ella. Si es posible trazar una recta que "corte" a la gráfica en más de un punto o que no la corte en ninguno, no es una función.

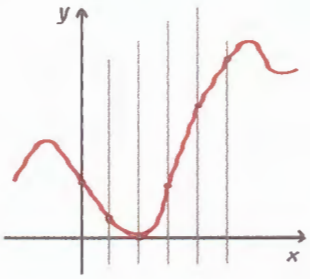
Por ejemplo:



Es una función.

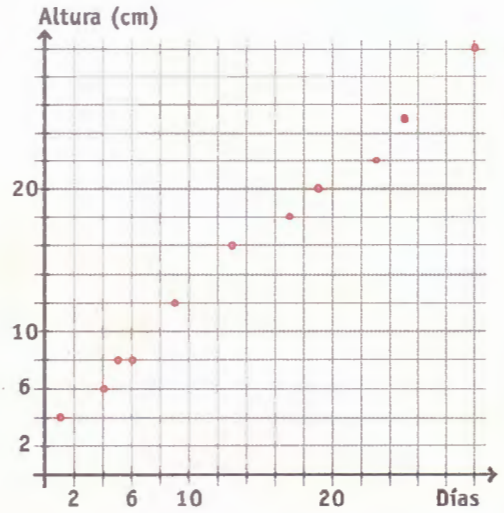


No es una función.



Es una función.

8 Para una tarea escolar, Elena observó el crecimiento de una planta durante un cierto tiempo y registró las mediciones que iba haciendo periódicamente. Presentó su trabajo mediante un gráfico como el de la derecha.



a) Completen la tabla con los datos del gráfico.

Días	1	4	5	6								
Altura (cm)	4											

b) ¿Cuántos días duró la experiencia?

.....

c) ¿Entre qué medidas, varió la altura de la planta en ese lapso?

.....

d) Expresen la respuesta anterior como un intervalo de números reales.

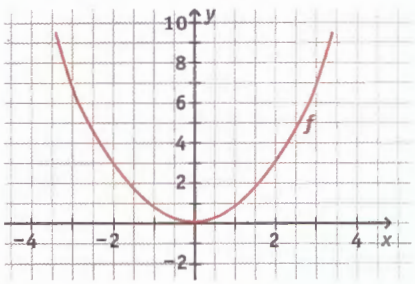
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

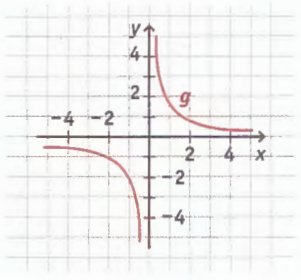
Dominio e imagen de una función

Para leer y recordar

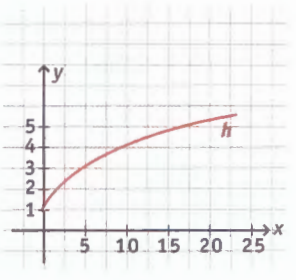
- En toda $f : A \longrightarrow B$, el conjunto A se llama *dominio* de la función (*Dom f*) y el conjunto B se llama *codominio*.
- El dominio está formado por todos los valores de la variable independiente para los que existe un valor de la variable dependiente. Cuando una función se define a través de una fórmula, $y = f(x)$, y no se menciona su dominio, se sobreentiende que está definida en su *dominio natural*, es decir, para todos los valores de x para los cuales es posible hallar $f(x)$ mediante su fórmula.
- Se llama conjunto *imagen* de la función (*Im f*) a la parte del codominio que representa todos los valores de la variable dependiente.



$f(x) = x^2$ $\quad Dom\ f = \mathbb{R}$ $\quad Im\ f = [0; +\infty)$



$g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad Dom\ g = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad Im\ g = \mathbb{R} - \{0\}$



$h(x) = \sqrt{x + 1}$ $\quad Dom\ h = [0; +\infty)$ $\quad Im\ h = [1; +\infty)$

9 Indiquen el dominio y la imagen de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

.....

.....

b) $g(x) = \sqrt{x - 1}$

.....

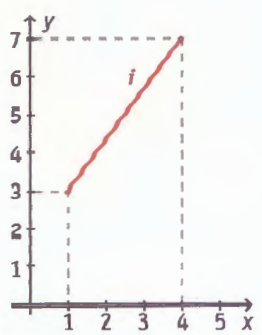
.....

c) $h(x) = x^2 + 3$

.....

.....

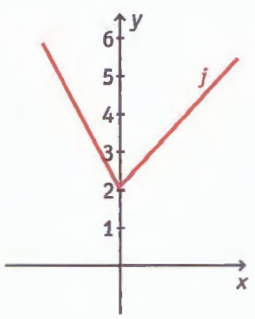
d)



.....

.....

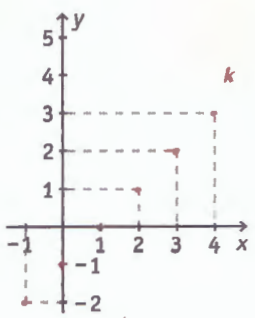
e)



.....

.....

f)



.....

.....

g) $\ell(x) = |x - 2|$

.....

.....

h) $m(x) = x^3$

.....

.....

i) $n(x) = \sqrt[3]{x}$

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Clasificación de funciones

10 Consideren las funciones de fórmula $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 3x^2 - 1$.

a) Hallen, cuando sea posible:

I. $x / f(x) = 4$ II. $x / g(x) = 11$ III. $x / g(x) = -2$

....

b) Para cada uno de los ítems anteriores, indiquen si pudieron encontrar un valor único de x.

.....

.....

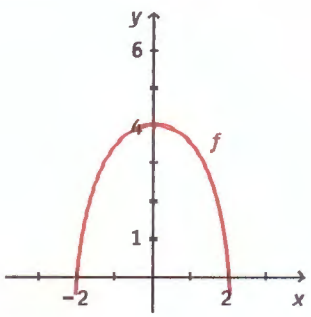
11 Observen la gráfica de la función f.

a) ¿Cuál es la preimagen de 4 a través de f? ¿Y la de 6?

.....

b) ¿Cuál es la imagen de 2? ¿Y la de –2?

.....



Para leer y recordar

- Cuando en una función no hay dos o más elementos del dominio que tengan la misma imagen, se dice que esa función es *inyectiva*. Es decir:

f es inyectiva cuando para cualquier $a \in$ Dom f y cualquier $b \in$ Dom f, si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$.

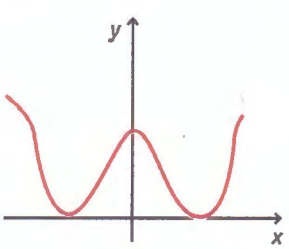
- Cuando en una función todos los elementos del codominio tienen al menos una preimagen, se dice que esa función es *sobreyectiva*. Es decir, cuando el conjunto imagen coincide con el codominio:

f es sobreyectiva cuando para cualquier $c \in$ Im f existe $a \in$ Dom f tal que $f(a) = c$.

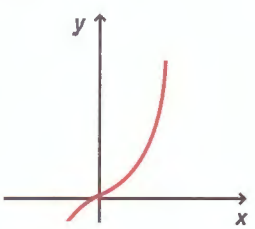
- Una función que es inyectiva y sobreyectiva se llama *biyectiva*.

12 Clasifiquen las siguientes funciones en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

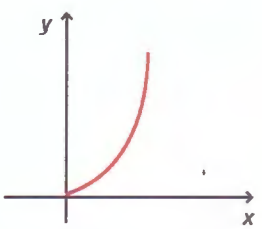
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



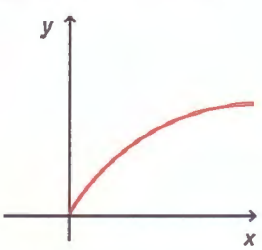
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



c) $l : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$



d) $k : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Composición de funciones

13 En un taller, trabajan dos artesanos, Ana y Juan. Venden un modelo exclusivo de espejos cuadrados pintados a mano, que cuestan, según su tamaño, $45 el m^2 y, si son para colgar, llevan un gancho que cuesta $5,50. Para presupuestar cada espejo que les encargan, Ana generó una planilla de cálculo en la que se obtiene el precio del espejo, con y sin gancho, si se ingresa en la computadora la medida del lado. Juan presupuesta el espejo, en el momento, con una calculadora común.
Un cliente les encarga un espejo de 0,80 m de lado, y Juan hace los siguientes cálculos:
45 . 0,80 . 0,80 = 28,80; 28,80 + 5,50 = 34,30.

a) ¿Qué fórmula creen que colocó Ana en la celda de la planilla que corresponde a un espejo sin gancho de x metros de lado?

b) ¿Qué fórmula creen que colocó en la celda de la planilla, contigua a la anterior, que corresponde al mismo espejo, pero con gancho para colgar?

Para leer y recordar

- **La composición de dos funciones f y g es una operación que consiste en la aplicación de una de ellas al resultado de aplicar la otra. Lo escribimos así:**

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ $\quad$ $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Se lee: f compuesta con g (al revés de como se escribe).

Ejemplo:

$f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x + 2) = (3x + 2)^2$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 3 \cdot x^2 + 2$

- **Para que el resultado de la composición $g \circ f$ sea una función, se debe cumplir la siguiente condición:** ***el conjunto imagen de f debe estar incluido en el dominio de g.***

14 Consideren las funciones de fórmulas: $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 3$, y hallen las fórmulas de:

a) $(f \circ g)(x) =$ .....

b) $(g \circ f)(x) =$ .....

c) $(f \circ f)(x) =$ .....

d) $(g \circ g)(x) =$ .....

15 Las funciones h y j tienen las siguientes fórmulas: $h(x) = 2x - 5$ y $j(x) = (x + 5) : 2$.

a) Hallen las fórmulas de $(h \circ j)(x)$ y de $(j \circ h)(x)$.

b) Enuncien alguna conclusión.

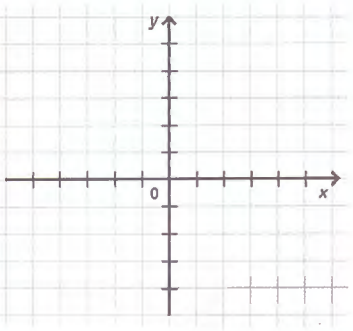
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Función inversa

16 Completen la tabla de valores y tracen el gráfico de cada una de las siguientes funciones.

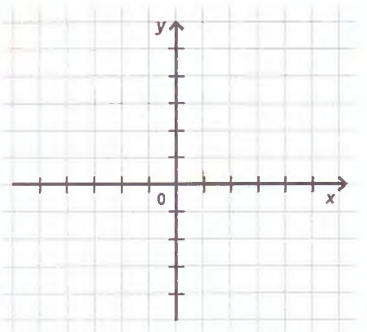
a) $f(x) = x + 2$

x	$f(x)$
−2	0
−1	1
0	2
1	
2	



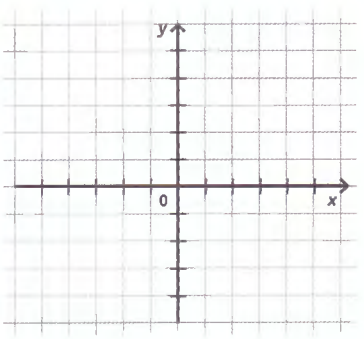
b) $g(x) = x - 2$

x	$g(x)$
0	
1	
2	
3	
4	



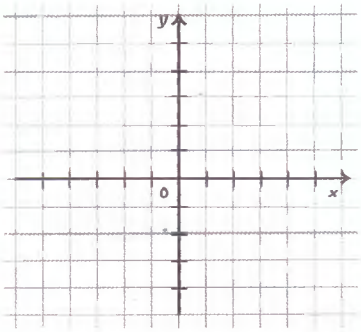
c) $h(x) = x \,.\, 3$

x	$h(x)$
−2	
−1	
0	
1	
2	



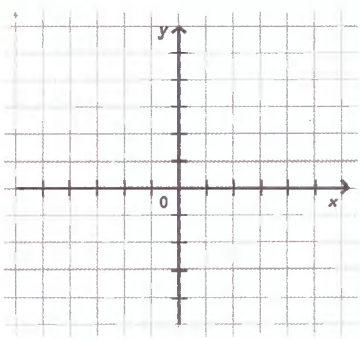
d) $j(x) = x : 3$

x	$j(x)$
−6	
−3	
0	
3	
6	



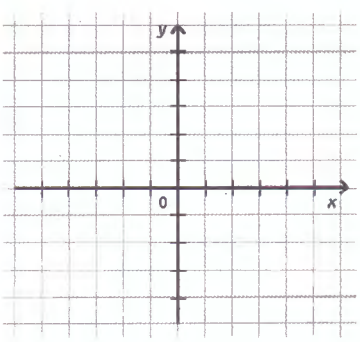
e) $l(x) = 2x + 1$

x	$l(x)$
−2	
−1	
0	
1	
2	



f) $m(x) = (x - 1) : 2$

x	$m(x)$
−3	
−1	
1	
3	



¿Qué particularidad encuentran en las tablas y en las gráficas?

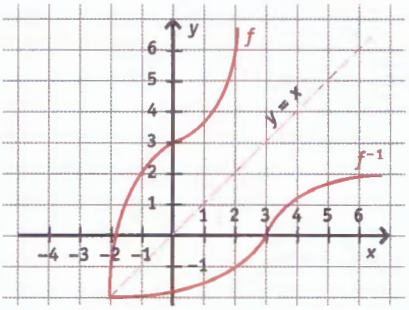
Para leer y recordar

- La *función inversa* de una función f, si existe, es otra función f^{-1} tal que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.
- Para que una función tenga su inversa, debe ser biyectiva.
- Si f^{-1} es la función inversa de f : $Dom\ f^{-1} = Im\ f$ y viceversa.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

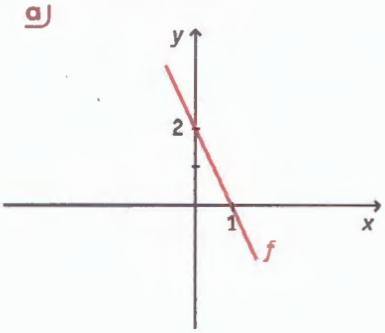
Para observar

La gráfica de una función y la de su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$.

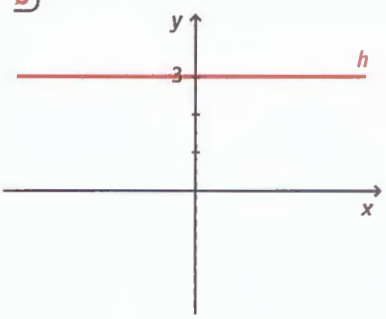


17 Observen las gráficas de las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y, cuando sea posible, construyan, en el mismo par de ejes cartesianos, una gráfica aproximada de la función inversa de cada una. Cuando no sea posible, expliquen por qué.

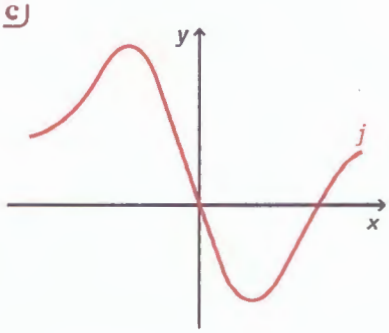
a)



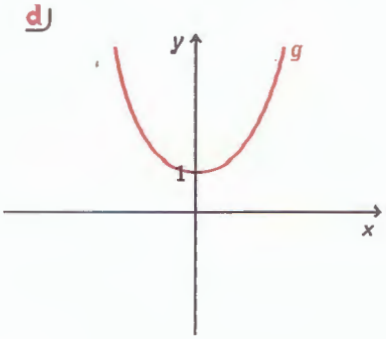
b)



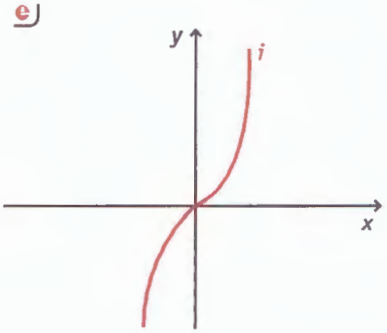
c)



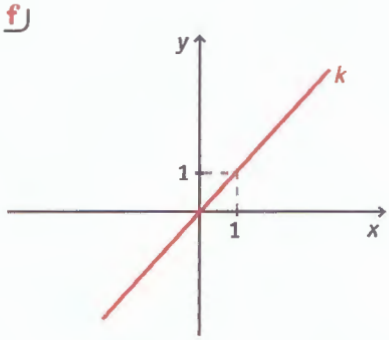
d)



e)



f)



18 Hallen la fórmula de la función inversa en cada caso.

a) $f(x) = (2 - x) : 5$ .....

b) $g(x) = (2x + 1)^3$ .....

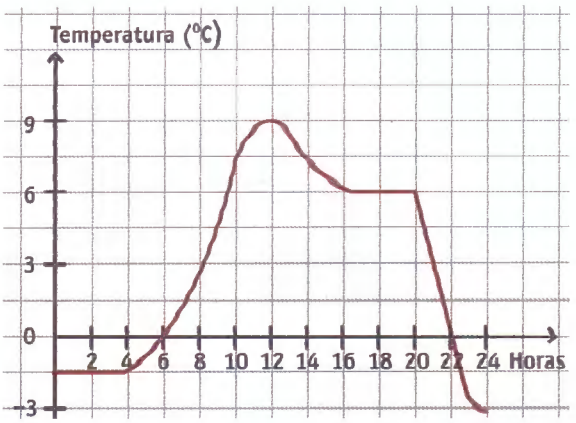
c) $h(x) = x^5 + 1$ .....

d) $j(x) = 3x - 0{,}9$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Crecimiento, decrecimiento y extremos

19 En la gráfica de la derecha, se representa la temperatura ambiente registrada en cierta ciudad a lo largo de un día.



a) ¿Qué temperatura se registró a las 10:00? ¿En qué otro momento del día, se registró la misma temperatura?

.....

b) ¿A qué hora, se registró la temperatura máxima? ¿Cuál fue? ¿Cómo se observa este dato en el gráfico?

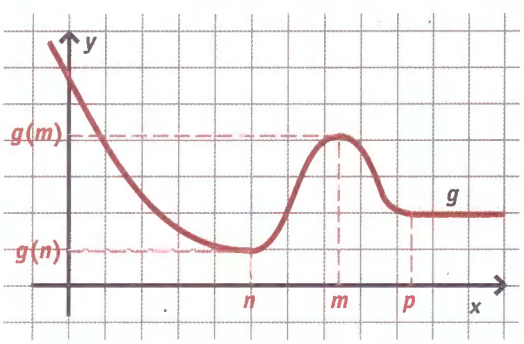
.....

c) ¿En qué momentos de ese día, la temperatura estuvo en aumento? ¿Cómo se observa esto en el gráfico?

.....

Para leer y recordar

- La gráfica de una función se lee siempre de izquierda a derecha, es decir, en el sentido en que aumentan los valores de x. Con este sentido de lectura, se dice que la función es:
  - *creciente*: en los intervalos en los que los valores de y aumentan;
  - *decreciente*: en los intervalos en los que los valores de y disminuyen;
  - *constante*: en los intervalos en los que los valores de y no varían.



Por ejemplo:
La función g es constante en el intervalo $(p; +\infty)$, creciente en el $(n; m)$ y decreciente en $(-\infty; n) \cup (m; p)$.
Además:
La función g tiene un *máximo local* en $x = m$, pues $g(m)$ es mayor que las imágenes de los valores de x "cercanos" a m, y tiene un *mínimo local* en $x = n$, pues $g(n)$ es menor que las imágenes de los valores de x "cercanos" a n.
También puede expresarse: $g(n)$ es un mínimo local de g y $g(m)$ es un máximo local de g.

- Una función puede presentar más de un máximo o mínimo local.

20 Representen gráficamente las funciones f y g e indiquen sus intervalos de crecimiento y sus extremos.

a) $f(x) = (x-2)^2$

b) $g(x) = -x^2 + 2$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Conjuntos de positividad y de negatividad. Ceros de una función

21 Para la gráfica de la actividad 19, indiquen:

a) Los intervalos para los cuales las temperaturas fueron positivas.

.....

b) Los intervalos para los cuales las temperaturas fueron negativas.

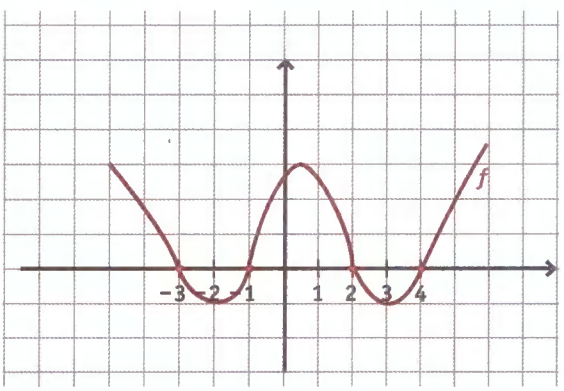
.....

c) Los momentos en los que se registró una temperatura de 0 °C .

.....

Para leer y recordar

- Llamamos *conjunto de positividad* de una función, y lo anotamos C^+, al conjunto de valores del dominio para los cuales las imágenes son positivas.
- Análogamente, el *conjunto de negatividad*, C^-, contiene a todos los valores del dominio para los cuales la imagen es negativa.
- El *conjunto de ceros*, C^0, es el conjunto de valores del dominio para los cuales la función se anula, es decir, las abscisas de los puntos de contacto de la gráfica de la función con el eje *x*.

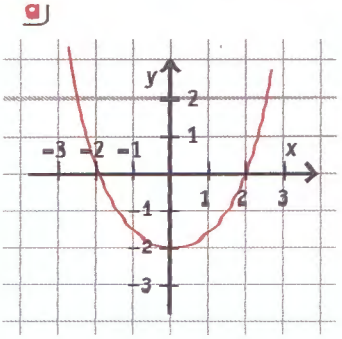


$C^+ = (-\infty; -3) \cup (-1; 2) \cup (+4; +\infty)$

$C^- = (-3; -1) \cup (-2; 4)$ $C^0 = \{-3; -1; 2; 4\}$

22 Para cada función, indiquen el conjunto de positividad, el de negatividad y el conjunto de ceros.

a)

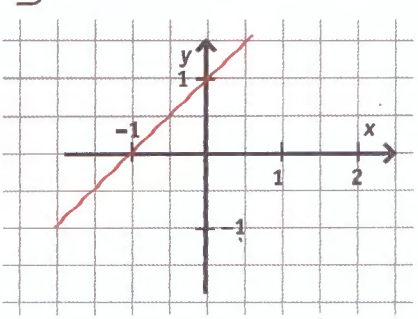


$C^+ =$ .....

$C^- =$ .....

$C^0 =$ .....

b)

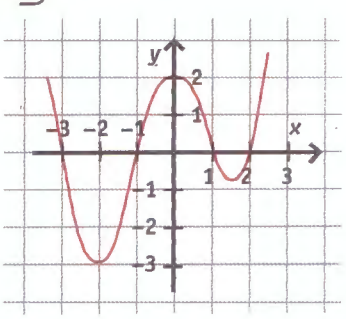


$C^+ =$ .....

$C^- =$ .....

$C^0 =$ .....

c)



$C^+ =$ .....

$C^- =$ .....

$C^0 =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

23 Construyan la gráfica de una función que cumpla con las características pedidas en cada caso, cuando sea posible. Cuando no sea posible, expliquen por qué.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $C^0 = \{-2; 0; 3\}$; $C^+ = (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$; $C^- = (0; 3) \cup (3; +\infty)$; 3 y –4 son máximos locales.

b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $C^0 = \{-1; 2\}$; $C^+ = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; $C^- = (-1; 2)$; tiene un máximo local en $x = 1$.

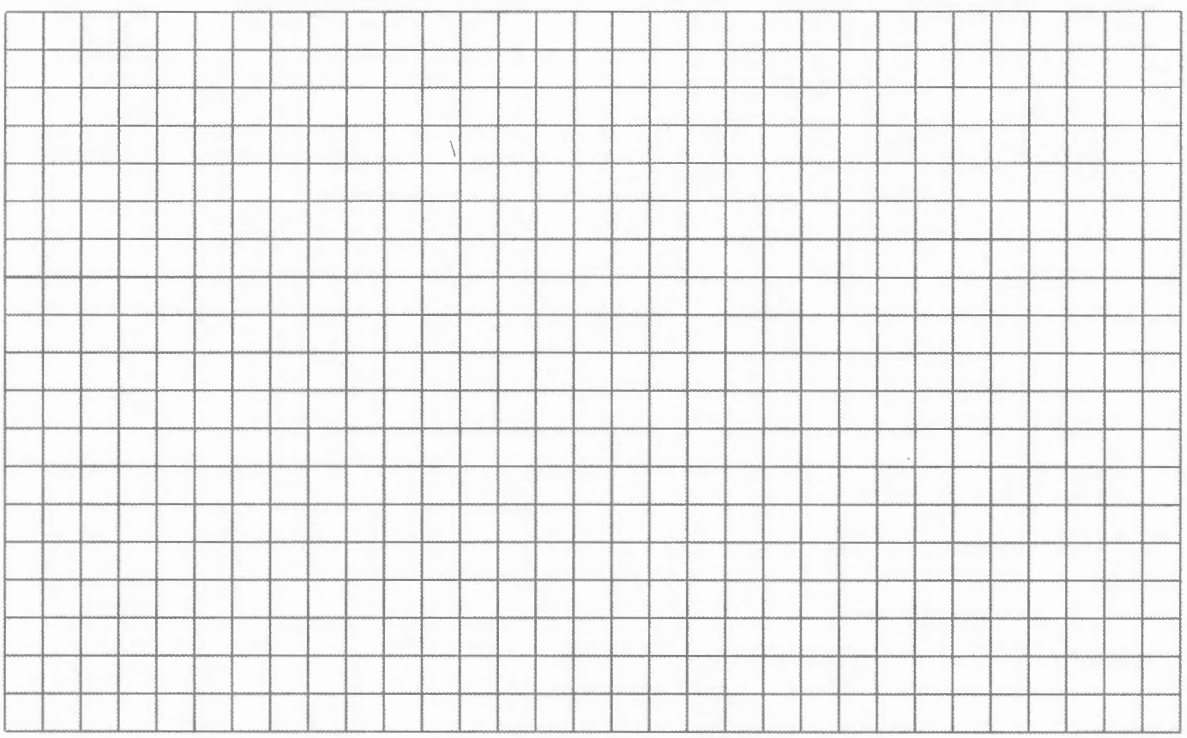
c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $C^0 = \{0\}$; $C^+ = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; $C^- = (0; 3)$; es constante en $(-\infty; -1)$, es decreciente en $(-1; 2)$ y es creciente en $(2; +\infty)$.

24 Consideren las funciones f y g de fórmulas:
$f(x) = x^4 - 16$; $g(x) = 0{,}5x + 7$

a) Hallen los ceros de cada una.

.....

b) Verifiquen, gráficamente, la respuesta anterior.



25 Un ciclista que se está entrenando para una competencia sale de su casa a las 8:00 de la mañana y recorre un circuito de 120 km que consta de cuatro partes de igual longitud. El ciclista regresa a las 12:00 del mediodía.
Completa el primer tramo a las 8:30 hs y se detiene 15 minutos; el segundo, de mayor pendiente, lo completa en 45 minutos y descansa otros 15; el tercer tramo es en bajada, y el deportista pedalea durante 15 minutos para completarlo. Por último, y sin descansar previamente, completa el circuito a marcha lenta.

a) Realicen el gráfico de la distancia recorrida por el ciclista en función del tiempo de marcha.

b) Estudien la función graficada, indicando: dominio, imagen e intervalos de crecimiento.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La medición de audiencia o *rating* televisivo

En la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y en el Gran Buenos Aires, la medición de audiencia televisiva se realiza mediante unos instrumentos electrónicos llamados *people meters*, ubicados en 810 hogares, que registran el consumo televisivo, el cambio de canales y el tiempo de permanencia frente al televisor de cada uno de los miembros de la familia que lo hayan sintonizado.

Este sistema consiste en un control remoto que identifica a cada persona. Al encender el televisor o al acercarse a ver televisión, cada integrante de la familia pulsa la tecla que le corresponde y se registra como telespectador. Al día siguiente, la empresa medidora recoge, a través de una línea telefónica, la información grabada en el aparato y procesa los datos para obtener las mediciones.

Cada punto de *rating* de un programa televisivo significa que el 1% de los hogares vieron ese programa en determinada franja horaria; y esto equivale a algo más de 30 000 personas.

Últimamente, comenzó a utilizarse un nuevo sistema, conocido como *real time*, que permite registrar datos cada 60 segundos; y esta información llega a los celulares y a las computadoras de los productores de televisión con dos minutos de retraso. Este sistema se halla instalado sólo en 700 aparatos de televisión; pero, en algunos casos, ejerce la suficiente influencia para que se tomen decisiones sobre la marcha de los programas transmitidos en vivo.

© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

26 En el siguiente cuadro de doble entrada, se muestran las mediciones de audiencia de tres canales de televisión durante la mañana de un día determinado.

Hora	Canal A	Canal B	Canal C
7:00	6,6	1,0	6,0
8:00	0,3	4,3	2,4
9:00	0,3	7,2	2,7
10:00	0,4	5,7	8,3
11:00	0,6	3,6	4,2
12:00	1,7	0,3	5,6

a) A partir de los datos de la tabla, construyan un gráfico cartesiano para cada canal.

b) Analicen la función *rating* de esa mañana para cada canal.

La fotografía digital y los megapíxeles

La fotografía digital surge al aplicar la tecnología informática a la imagen fotográfica. Una explicación muy simplificada de lo que esto significa es la siguiente: una señal analógica (un color) se transforma en una señal digital (una cifra expresada en el sistema binario, es decir, mediante 0 ó 1).

El fragmento más pequeño de una fotografía digital se denomina píxel, en inglés, *pixel* (abreviatura de *picture element*, 'elemento de la imagen') y sirve de unidad para medir la *resolución* de una imagen. Con frecuencia, en primer lugar, se indica el número de píxeles contenidos en una línea de una pulgada (aproximadamente, 2,45 cm) o PPI (*Pixels Per Inch*) y, en segundo lugar, el número de líneas por pulgada. El producto de los dos números indica el total de píxeles por pulgada cuadrada. Ese conjunto de píxeles se denomina *bit map*, y podemos imaginarlo como una hoja cuadriculada en la que cada cuadrícula es un píxel. En efecto, para un determinado tamaño de hoja, cuanto más pequeñas sean las cuadrículas, mayor resolución tendrá la imagen, pero también "pesarán" más —tendrá que ser de mayor tamaño el archivo informático necesario—; por eso, se requerirá más tiempo para su edición o impresión. Por ejemplo, una resolución de 1600 x 1200 PPI significa que una pulgada cuadrada contiene 1 920 000 píxeles, o 1,92 megapíxeles (millones de píxeles). En la práctica, se aproxima al entero siguiente, es decir, 2 megapíxeles.

Además, una imagen de 1" por 1" y 200 PPI contiene cuatro veces más píxeles que una imagen de 1" por 1" y 100 PPI, por lo que el archivo es cuatro veces mayor.

Los monitores de las computadoras están calibrados en PPI. En cambio, las impresoras, al procesar una imagen, utilizan DPI (*Dots Per Inch*), que significa 'puntos por pulgada'. Esta diferencia puede ser el motivo por el cual algunas imágenes que se ven perfectas en la pantalla aparecen distorsionadas cuando se imprimen. Para obtener una impresión fiel a la imagen capturada por una cámara, es aconsejable utilizar un tamaño de 300 DPI.

27 Un diseñador gráfico tiene un archivo de imágenes, todas de 2" por 2", de iguales características de formato y de color, pero de distinta resolución. Si las de 100 PPI "pesan" 0,5 Mb cada una, completen la tabla siguiente y construyan la gráfica del "peso" de las imágenes de esas características, en función de su resolución.

Resolución (PPI)	100	200	300	400	500	600
Peso (Mb)						

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

28 Irina tiene un CD con grabaciones de audio. Sabe que 74 minutos de música ocupan los 650 Mb de capacidad del disco y quiere seguir grabando hasta aprovecharla al máximo. Su hermano elabora una tabla para ayudarla a controlar el espacio restante.

Duración de los temas musicales (minutos)	10	25		50	60	74
Espacio ocupado en el disco (Mb)			325			650

a) Completen la tabla.

b) Vuelquen los datos de la tabla en un gráfico cartesiano.

c) Indiquen dominio e imagen de la función asociada a esta situación.

d) Clasifiquen la función.

29 En una envasadora de bebidas, están probando nuevos diseños para las botellas de dos litros. Para ello, llenan cada uno de los prototipos con una canilla de flujo constante y miden la altura que va alcanzando el agua a medida que transcurre el tiempo. Un experto interpreta los datos obtenidos en un gráfico cartesiano.

a) ¿Cuál es el gráfico que le corresponde a cada botella? ¿Por qué?

A

B

C

D

I

II

III

IV

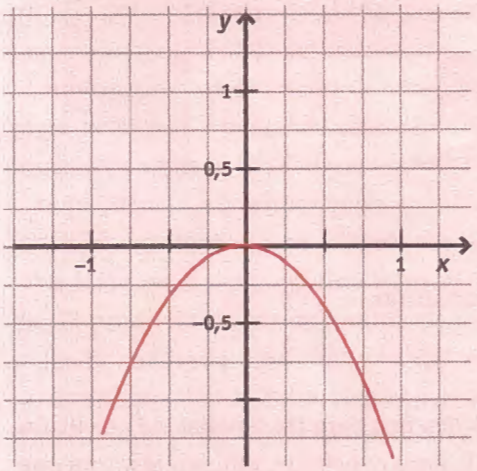
b) Construyan un gráfico aproximado para el siguiente modelo de botella.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

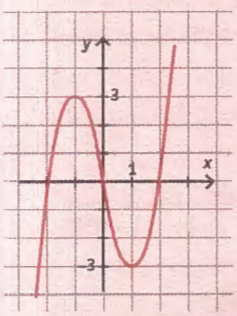
1 La función representada en el siguiente gráfico cartesiano:



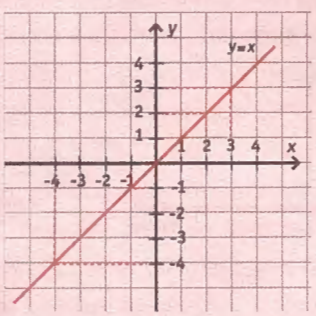
- a) tiene por dominio al conjunto $\mathbb{Z}$.
- b) no tiene máximos ni mínimos.
- c) tiene dos ceros.
- d) no es positiva para ningún elemento de su dominio.

2 A partir de los gráficos A y B, se puede afirmar que:

A

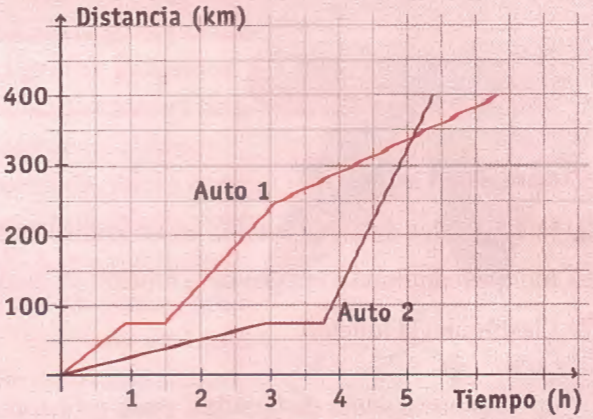


B



- a) corresponden a funciones.
- b) corresponden a funciones biyectivas.
- c) corresponden a funciones decrecientes.
- d) ninguna de las anteriores es correcta.

3 Dos automóviles parten del mismo lugar y al mismo tiempo para emprender un viaje de 400 km.



A partir de la observación del gráfico, que representa la distancia recorrida por ambos autos en función del tiempo de marcha, se puede concluir que:

- a) los dos autos estuvieron detenidos durante el mismo tiempo.
- b) el auto 2 llegó antes que el 1.
- c) ambos autos llevaban la misma velocidad.
- d) no se puede establecer la velocidad media de los autos.

4 La función de fórmula $f(x) = 2x^2$

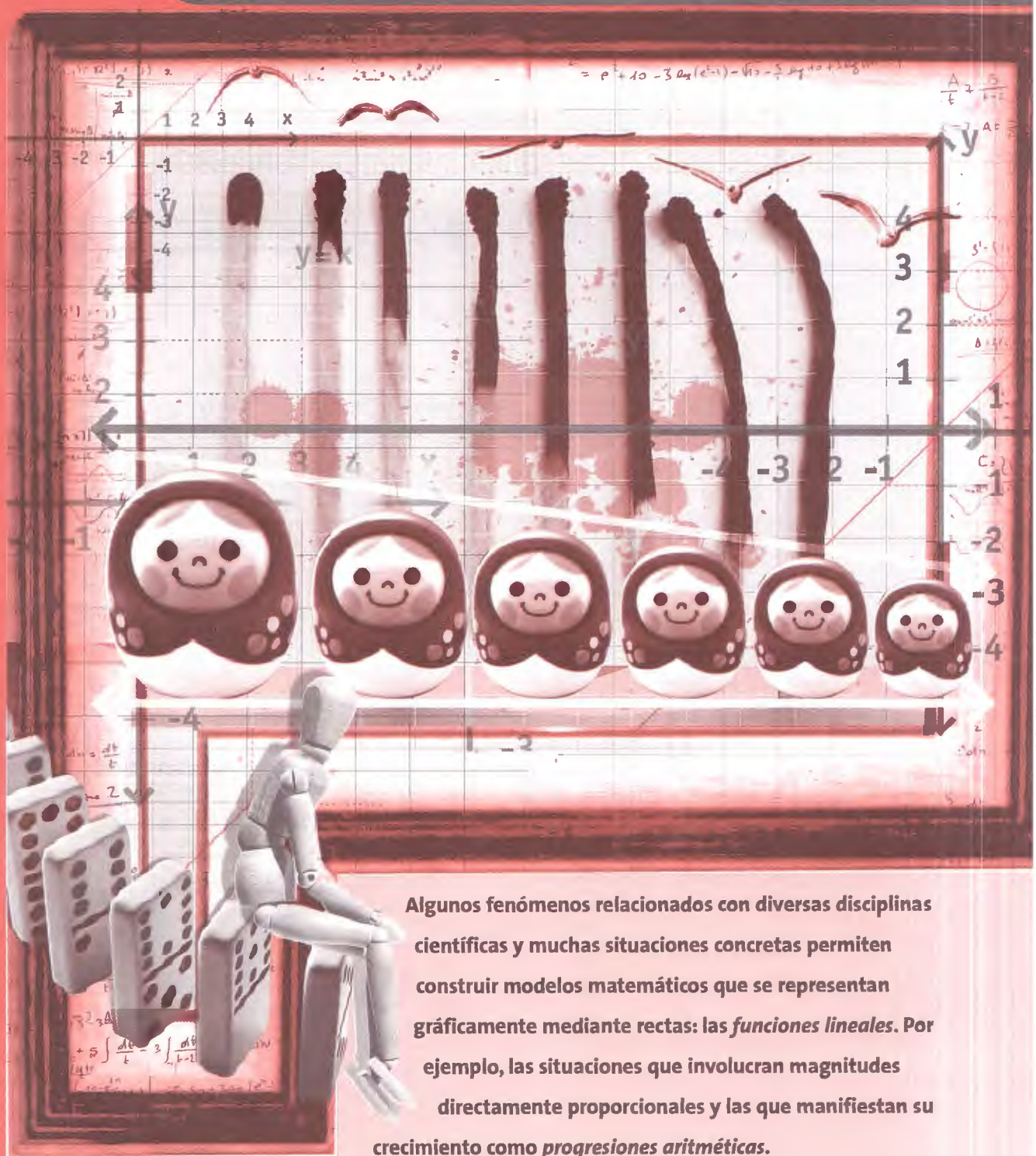
- a) es inyectiva.
- b) tiene por imagen al conjunto $[2; +\infty)$.
- c) tiene un solo cero.
- d) es creciente en todo su dominio.

5 La función de fórmula $f(x) = 3x - 3$

- a) no es biyectiva.
- b) tiene por inversa a $f^{-1}(x) = 3(3x + 3)$.
- c) es positiva en $(1; +\infty)$.
- d) es decreciente.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

3 FUNCIONES LINEALES Y PROGRESIONES ARITMÉTICAS



Algunos fenómenos relacionados con diversas disciplinas científicas y muchas situaciones concretas permiten construir modelos matemáticos que se representan gráficamente mediante rectas: las *funciones lineales*. Por ejemplo, las situaciones que involucran magnitudes directamente proporcionales y las que manifiestan su crecimiento como *progresiones aritméticas*.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Resuelvan las siguientes ecuaciones, cuando sea posible, y cuando no lo sea, expliquen por qué.

a) $0{,}5x + \frac{7}{10} = 2{,}5(x + 3)$

b) $\frac{x - 1}{2} = 0{,}5x + 1$

c) $\frac{2x - 1}{x + 6} = \frac{1}{2}$

d) $2x\left(x - \frac{1}{4}\right) = x(2x - 3{,}5) + 5$

e) $x(x - 3) = -5x + 2(x + 8)$

f) $\frac{x + 1}{2} + \frac{x - 3}{3} = x - 1$

2 Resuelvan los siguientes problemas:

a) En un plano que fue construido con una escala 1:2000, el perímetro de un lote cuadrado mide 40 cm. ¿Cuántos metros de frente tiene el lote, en la realidad?

.....

.....

b) Ruth quiere comprar un diccionario inglés-mapuche por Internet y averigua que su precio internacional es €45 (euros). ¿Cuánto debe abonar, en pesos, si el día de la compra la cotización del euro es $3,92?

.....

.....

3 Indiquen cuáles de las siguientes tablas corresponden a magnitudes directamente proporcionales y expliquen qué hicieron para responder.

a)

x	y
0,5	0,75
1,5	2,25
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

b)

x	y
0	0
2	6
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c)

x	y
1	0,5
0,5	0,25
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

d)

x	y
2	5
1	3
$\frac{1}{2}$	2

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El modelo lineal

4 Martín quiere comprar diez CD vírgenes y averigua en Internet que en la página *demercado.com*, se vende a $8 el lote de diez CD; y allí cobran, además, $4 por el envío. Su mamá le aconseja que los compre en el negocio del barrio porque los vende a $1 cada uno, así se ahorran los gastos de envío.

a) ¿Cuál de las dos propuestas es más económica para comprar 10 unidades?

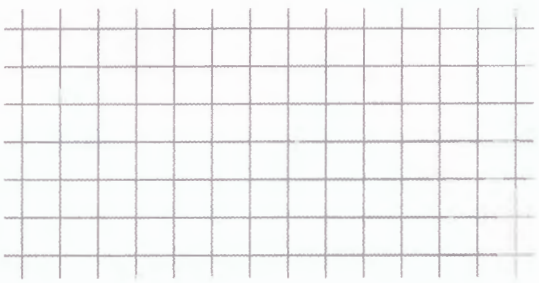
b) ¿Cuál de las dos propuestas es más económica si compra 20 CD? ¿Y si compra 30?

c) La hermana de Martín compró 20 CD en *rematelibre.com* y gastó $20. Esa compra incluía $5 por gastos de envío. ¿Cuál es el precio de cada CD?

5 Alicia compra detergente suelto en "La Blancura", que lo cobra $7 el litro. Se puede comprar la cantidad que uno desee, pero hay que llevar el envase.

a) Completen la tabla de valores correspondiente a la venta de detergente en "La Blancura" y vuelquen los datos de la tabla en un gráfico cartesiano.

Cantidad de detergente (l)	0,25	0,5			1,5
Precio ($)			5,25	7	

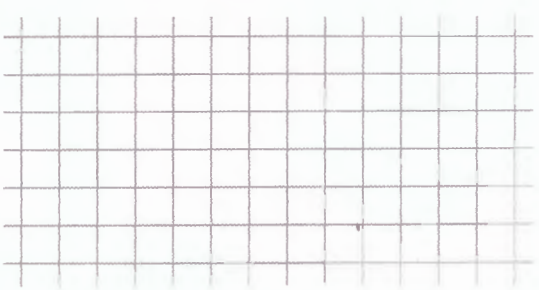


b) Escriban una expresión del precio en función de la cantidad de detergente comprada, para este caso. ¿Es una función de proporcionalidad directa?

.....

c) La vecina de Alicia le recomienda comprar en "Pulcritud", porque venden el detergente, de la misma calidad, a $6,50 el litro. En este comercio, también se puede comprar la cantidad que uno desee, pero solamente lo envasan en los recipientes que ellos mismos venden a $2 cada uno. Completen la tabla de valores correspondiente a la venta de detergente en "Pulcritud" y vuelquen los datos de la tabla en un gráfico cartesiano.

Cantidad de detergente (l)	0,25		0,75	1	1,5
Precio ($)		5,25			11,75



d) Escriban una expresión del precio en función de la cantidad de detergente comprada, para este caso. ¿Es una función de proporcionalidad directa?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La función lineal

6 Completen las tablas correspondientes a funciones definidas en $\mathbb{R}$ y, luego, construyan la gráfica de cada una, en sus carpetas.

a)

x	$f(x)=3x$
-2	
$-1{,}5$	
0	
	$1{,}5$
	3
	$7{,}5$

b)

x	$f(x)=2x-1$

c)

x	$f(x)=3x+2$

Para leer y recordar

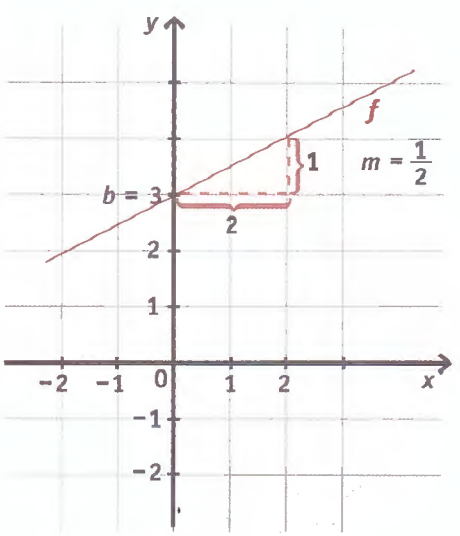
- Llamamos *función lineal* a toda función cuya expresión pueda reducirse a la forma:
$f(x) = mx + b$ ($m \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$)
- La gráfica de una función lineal está formada por puntos alineados. Si está definida en su dominio natural, el conjunto $\mathbb{R}$, la gráfica es una recta.
- El coeficiente m es la *pendiente* y representa cuánto varía $f(x)$ por cada unidad que aumenta x.
- El coeficiente b es la *ordenada al origen*, es decir, la ordenada del punto en el que la gráfica de la función corta al eje y.

Por ejemplo, $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ es una función lineal. Puede representarse mediante una tabla y, también, con un gráfico cartesiano, de la siguiente manera.

x	$f(x)$
-2	2
-1	$\frac{5}{2}$
0	3
1	$\frac{7}{2}$
2	4

3 — 1 — $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2} : 1$



- Los cocientes entre las variaciones de x y de $f(x)$ son uniformes.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

7 Algunas de las siguientes fórmulas representan funciones lineales. Identifíquenlas e indiquen cuál es la pendiente y cuál es la ordenada al origen, cuando corresponda.

a) $f(x) = 3 - 3x$

b) $t(x) = 3 : (3x)$

c) $f(x) = 3x \cdot 3x$

d) $g(x) = 3x^3$

e) $f(x) = 3x : 3$

f) $h(x) = \sqrt{3}\,x + 3$

.....

.....

8 Completen las tablas.

Fórmula de la función lineal	Pendiente	Ordenada al origen
$f(x) = 0{,}5x - 1$	0,5	−1
$g(x) = 3 \cdot 3x$		
$h(x) =$	1	0

Fórmula de la función lineal	Pendiente	Ordenada al origen
$h(x) =$	0	1
$f(x) = 2(3x - 5)$		
$g(x) = \frac{3x + ...}{2}$		2

9 Construyan las tablas y grafiquen cada una de las siguientes funciones lineales definidas en $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = -x + 2$

x	$f(x)$

b) $h(x) = x - 2$

x	$h(x)$

c) $g(x) = 2x - 1$

x	$g(x)$

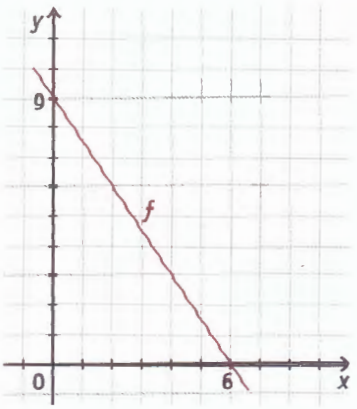
d) $j(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	$j(x)$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La ecuación de la recta

10 Observen la gráfica de la función *f*.



a) Anoten las coordenadas de tres puntos que pertenezcan a la gráfica.

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones representan la relación entre la abscisa y la ordenada de los puntos que anotaron?

I. $2y + 3x = 18$

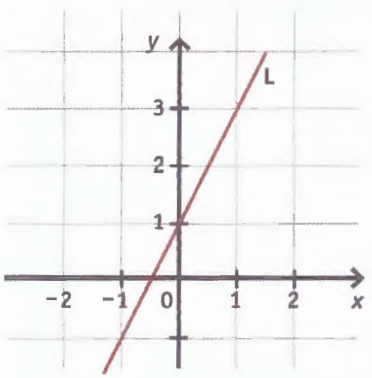
II. $6y - 9x = 0$

III. $y = -\frac{3}{2}x + 9$

IV. $\frac{y}{9} + \frac{x}{6} = 1$

c) ¿Cómo podrían obtener la pendiente de la recta graficada a partir de las coordenadas de dos de sus puntos?

Para leer y recordar



- Toda función lineal está asociada a una recta en el plano cartesiano, y viceversa; con excepción de las rectas perpendiculares al eje *x*, que no representan funciones.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$ es la recta L.

- Cada uno de los puntos de L tiene un par de coordenadas $(x; y)$ que verifican la ecuación $y = 2x + 1$; por eso, decimos que esa expresión es una *ecuación de la recta* L.
- Las coordenadas de cualquier punto que no pertenezcan a L no verifican esa igualdad.

Por ejemplo: $P = (1; 3) \in L \leftrightarrow 5 = 2 \cdot 1 + 1$

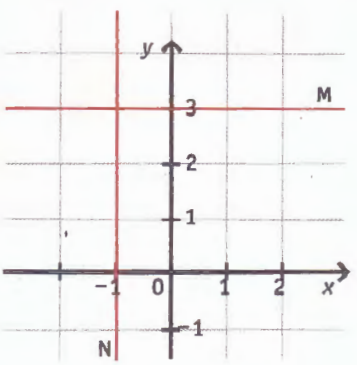
$Q = (1; 5) \notin L \leftrightarrow 2 \neq 2 \cdot 1 + 1$

- La ecuación de una recta horizontal que corta al eje *y* en *a* es $y = a$.
- La ecuación de una recta vertical que corta al eje *x* en *b* es $x = b$.

11 Consideren la recta R: $y = 7 - 0{,}2x$. Indiquen las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a R y las de dos puntos que no pertenezcan a R. Verifiquen sus respuestas gráficamente en sus carpetas.

.....

12 Escriban las ecuaciones de las rectas M y N del gráfico.



.....

.....

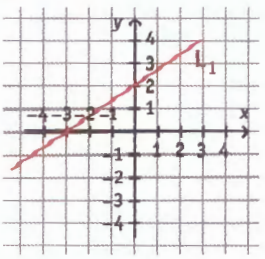
.....

.....

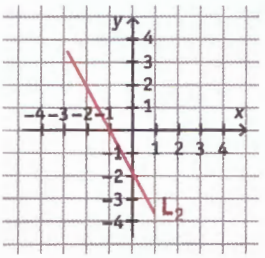
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

13 Calculen la pendiente de cada una de las rectas graficadas a continuación. Expliquen cómo lo hicieron.

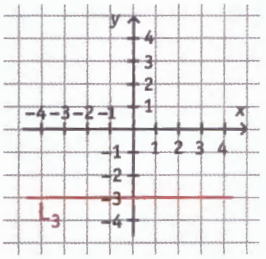
a)



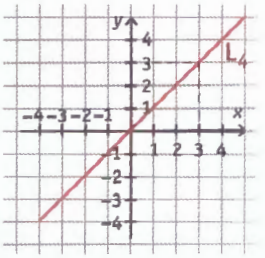
b)



c)



d)



14 Una recta contiene a los puntos E = (–2; –4) y F = (1; 5). ¿Cuál es su pendiente?

15 La recta H tiene pendiente 0,5.

a) ¿Puede contener a los puntos (7; 3) y (–5; –3)? ¿Por qué?

b) Si su ordenada al origen es 2, ¿contiene al punto (4; 5)?

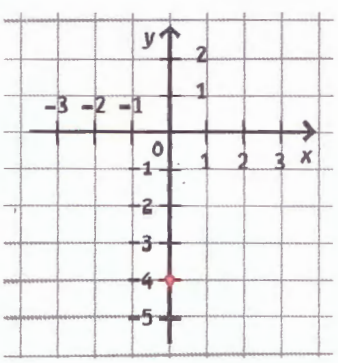
16 ¿Cuántas rectas contienen al punto (0; 0)? ¿Cuántas rectas con pendiente –1 contienen al punto (0; 0)?

17 La recta P tiene pendiente 2 y contiene al punto (1; 1). ¿Cuál es su ordenada al origen? Expliquen cómo lo pensaron.

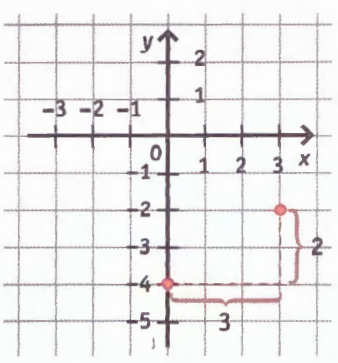
18 Escriban la ecuación de la recta D que tiene pendiente –0,5 y contiene al punto (0; 5). Verifiquen su respuesta gráficamente.

19 Escriban la ecuación de la recta que contiene a los puntos (–2; –3) y (4; –5). Verifiquen su respuesta gráficamente.

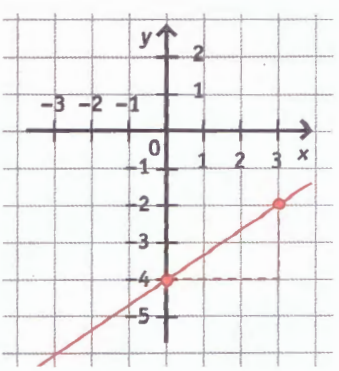
20 Grafiquen la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 4$ siguiendo los pasos que se muestran a continuación. Utilicen como datos la pendiente y la ordenada al origen.



Marcamos sobre el eje y la ordenada al origen.



A partir de ese punto, avanzamos 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba, y marcamos otro punto.

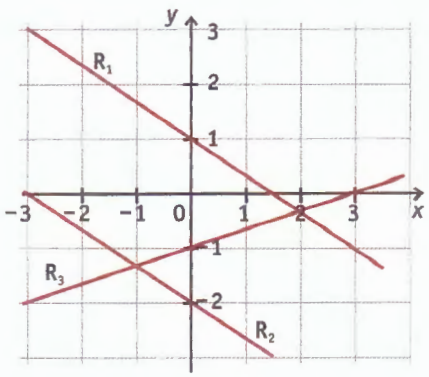


Trazamos la recta uniendo los dos puntos que marcamos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Rectas paralelas

21 Observen las rectas R_1, R_2 y R_3 graficadas en el siguiente par de ejes cartesianos.



a) Tracen otra recta R_4 tal que determine un paralelogramo con las tres anteriores.

b) Expliquen cómo lo hicieron.

c) ¿Hay una única recta que cumple la condición pedida?

d) Hallen las ecuaciones de cada una de las rectas que contienen a los lados del paralelogramo.

e) Comparen las ecuaciones de las rectas y enuncien alguna conclusión.

22 Analicen si las funciones lineales asociadas a las rectas de la actividad anterior son crecientes o decrecientes. ¿Qué relación encuentran entre el crecimiento de la función y la pendiente de la recta?

.....

23 Encuentren todos los grupos de rectas paralelas que hay en la siguiente lista.

K: $y - 3 = 0{,}2x$	N: $y = 5x - 1$	Q: $y + 9 = x$
L: $2y + 3 = -2x$	T: $5y - x = 10$	R: $y = -0{,}5x + 2$
M: $y - x = 1$	P: $y + x = 2$	S: $y = \frac{1}{5}x + 2$

.....

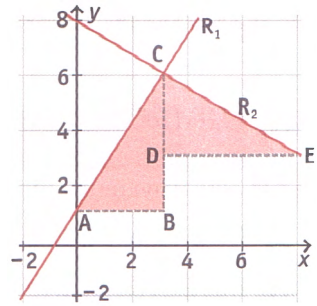
24 ¿Es posible que cuatro rectas asociadas a cuatro funciones crecientes determinen un rectángulo? ¿Por qué?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Rectas perpendiculares



25 Observen los triángulos ABC y CDE de la figura.

a) Clasifíquenlos según sus ángulos.

.....

b) Anoten las medidas de los siguientes lados:

$\overline{AB}$ = ... unidades $\overline{BC}$ = ... unidades $\overline{CD}$ = ... unidades $\overline{DE}$ = ... unidades

¿Qué relación hay entre los triángulos ABC y CDE? ¿Por qué?

.....

c) Indiquen la medida del ángulo ACE, sin usar transportador. Justifiquen.

.....

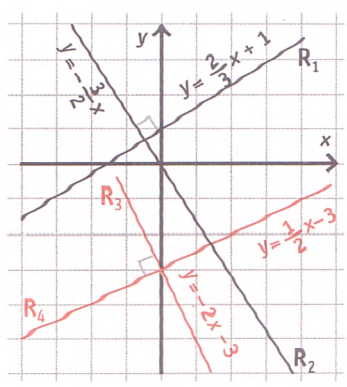
d) ¿Qué pueden afirmar acerca de las rectas R_1 y R_2 a partir de lo que respondieron en el punto c)?

.....

e) Escriban la ecuación de R_1 y la de R_2. ¿Qué particularidad encuentran en las pendientes?

.....

Para leer y recordar



Cuando el producto de las pendientes de dos rectas es −1, y se las representa en un sistema cartesiano utilizando la misma escala en ambos ejes, las rectas resultan perpendiculares.

Ejemplo:

$R_1: y = \frac{2}{3}x + 1$
$R_2: y = -\frac{3}{2}x$
$\Big\}$ $R_1 \perp R_2$

$R_3: y = -2x - 3$
$R_4: y = \frac{1}{2}x - 3$
$\Big\}$ $R_3 \perp R_4$

26 Hallen las ecuaciones de las rectas que cumplen las siguientes condiciones.

a) L_1 y L_2 son perpendiculares. Ambas contienen al origen de coordenadas, y L_2 tiene pendiente 3.

b) L_3 y L_4 son perpendiculares. L_3 contiene al origen de coordenadas, y L_4 tiene ordenada al origen −3 y corta al eje de abscisas en $x = 5$.

c) L_5 y L_6 son perpendiculares. L_5: $y + x = 0{,}5$, y L_6 contiene al punto (0; 4).

© Arque Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Algunas funciones especiales

La función constante

27 Construyan una tabla y representen gráficamente la función de fórmula $f(x) = 3$.

a) Describan la gráfica que obtuvieron.

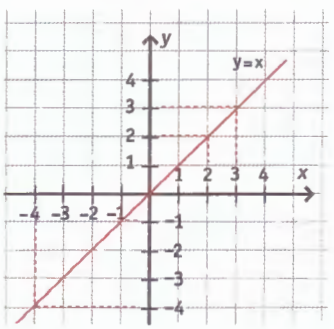
b) Indiquen la pendiente y la ordenada al origen.

La función identidad

Para leer y recordar

Se llama *función identidad* a aquella en la que cada elemento del dominio se corresponde consigo mismo, y su fórmula es: $y = x$

28 Observen el gráfico de la función identidad e indiquen:



a) su dominio y su imagen;

.....

b) sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento;

.....

c) sus conjuntos de positividad y de negatividad;

.....

d) si presenta máximos o mínimos;

.....

e) los ceros, si existen;

.....

f) su pendiente y su ordenada al origen.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

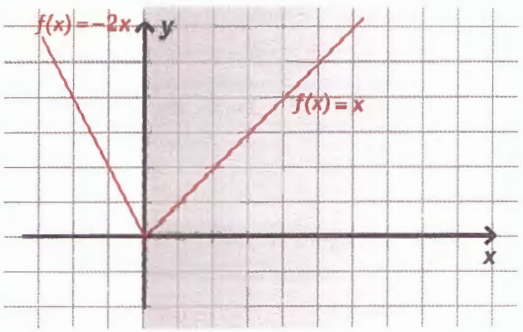
Funciones definidas por tramos lineales

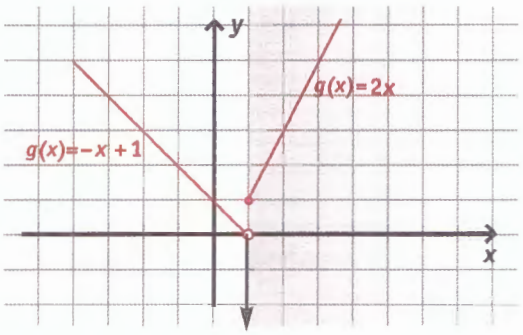
Para observar

Las funciones que siguen están definidas por tramos lineales.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = \begin{cases} -x + 1 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$





El círculo vacío significa que el punto no pertenece a ese tramo.

29 Desde un teléfono público, se puede hacer con veinte centavos una llamada local que dure hasta dos minutos en el horario de "tarifa normal". Terminados los dos minutos, se corta automáticamente la comunicación. Si se quiere hacer una llamada más larga, se deben colocar más monedas (cada 20 centavos que se agregan, se consiguen 2 minutos adicionales de comunicación).

a) ¿Cuánto cuesta hacer una llamada de 30 segundos? ¿De 2 minutos y 10 segundos? ¿De 3 minutos y medio? ¿De 3 minutos y 59 segundos? ¿De 4 minutos y medio segundo? ¿De 4 minutos?

b) Hagan un gráfico del costo de la llamada en función de su duración, en minutos, hasta los 10 minutos.

c) Escriban una fórmula que sirva para hallar el costo de las llamadas de menos de 10 minutos.

30 Los empleados de una empresa de mudanza tienen que subir un piano por las escaleras hasta el cuarto piso de un edificio.

a) A partir de los siguientes datos estimativos, hagan un gráfico de la altura aproximada que alcanzó el piano en función del tiempo transcurrido desde el inicio del ascenso, en minutos.

- Cada piso tiene 2,80 metros de altura.
- La velocidad promedio al subir el primer piso era de 1 metro de altura por minuto (supongan que la velocidad es constante, para hacer un cálculo aproximado).
- Al llegar al primer piso, descansaron 2 minutos.
- Luego, en cada piso, fueron disminuyendo la velocidad aproximadamente un 20% respecto del piso anterior, y el tiempo que se tomaron de descanso aumentó un 40% en cada piso con respecto al descanso anterior.

b) ¿Cómo se reflejan estas variaciones en el gráfico de la función?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

31 Grafiquen las siguientes funciones.

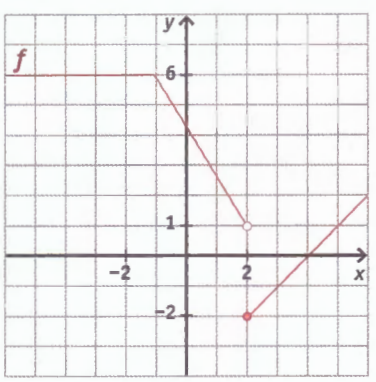
$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x > 0 \\ -x - 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

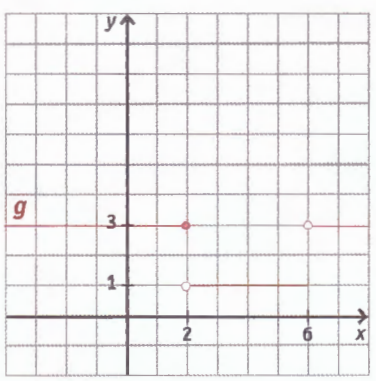
$$h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ -x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

32 Observen las gráficas de las siguientes funciones definidas por tramos y escriban su expresión simbólica.

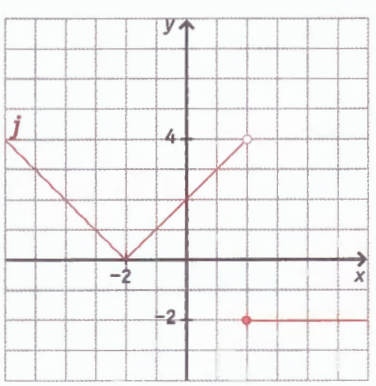
a)



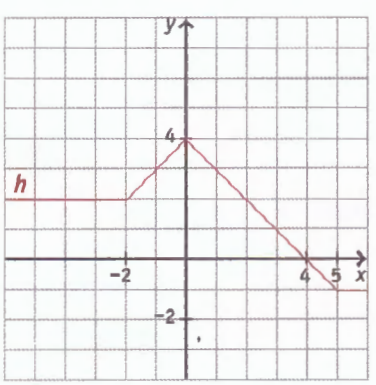
b)



c)



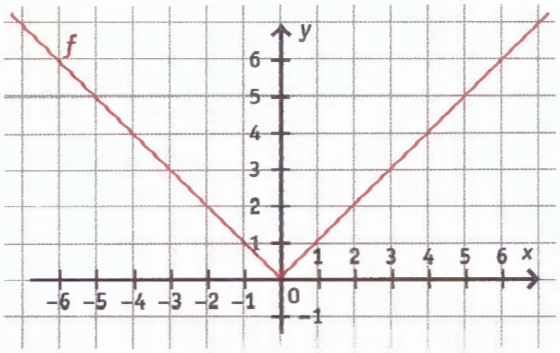
d)



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La función módulo

33 Observen la gráfica de la función *f* definida por tramos y escriban su fórmula.



.....

.....

.....

.....

.....

Para leer y recordar

Se llama *función módulo* a aquella que a cada elemento del dominio le hace corresponder su valor absoluto, y su fórmula es:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

34 Observen el gráfico de la función módulo e indiquen:

a) Su dominio y su imagen. .....

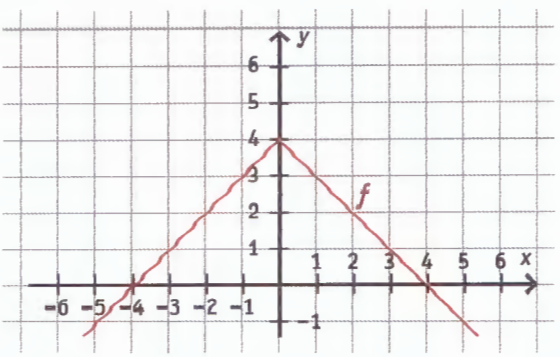
b) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento. .....

c) Sus conjuntos de positividad y de negatividad. .....

d) Si presenta máximos o mínimos. .....

e) Los ceros, si existen. .....

35 Escriban de dos maneras distintas la fórmula de la función graficada a continuación.



.....

.....

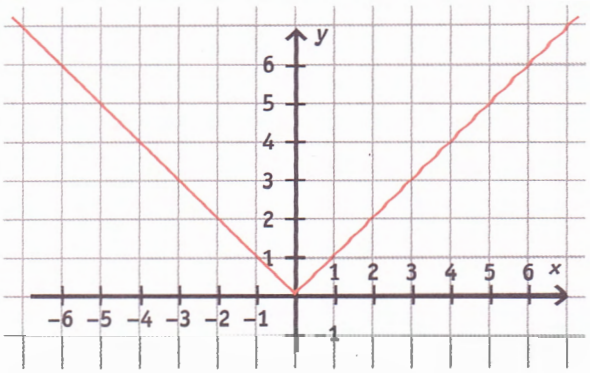
.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

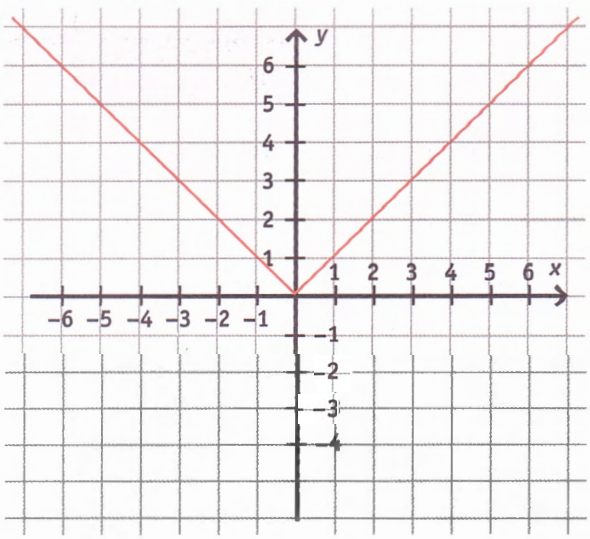
36 En el siguiente gráfico cartesiano, se representó la función de fórmula $f(x) = |x|$.



Construyan, en el mismo par de ejes, las gráficas de $g(x) = |x + 2|$ y de $h(x) = |x - 2|$. Enuncien alguna conclusión.

.....

37 Construyan, en el siguiente par de ejes cartesianos en el que se representó la función de fórmula $f(x) = |x|$, las gráficas de $g(x) = |x| + 2$ y de $h(x) = |x| - 2$.



Observen las gráficas que obtuvieron y enuncien alguna conclusión.

.....

38 Realicen un análisis completo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x + 1|$

b) $g(x) = |x| - 1$

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

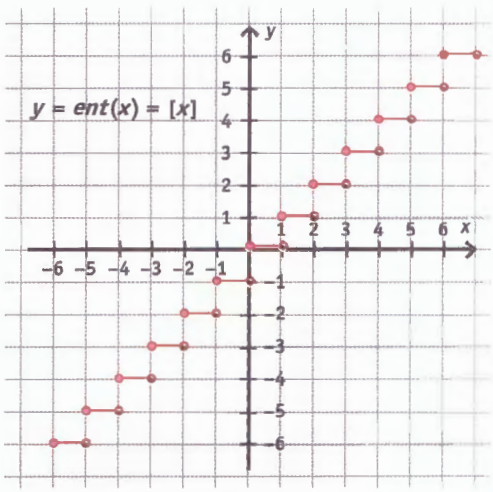
La función parte entera

Para leer y recordar

Se llama *parte entera* a la función que a cada elemento x del dominio le hace corresponder el mismo número x, si x es entero, y el menor de los dos números enteros consecutivos entre los que está comprendido x, si x no es entero.

Se simboliza: $y = ent(x)$ o $y = [x]$

39 Observen el gráfico de la función parte entera e indiquen:



a) Su dominio y su imagen. .....

.....

b) Sus conjuntos de positividad y de negatividad. ....

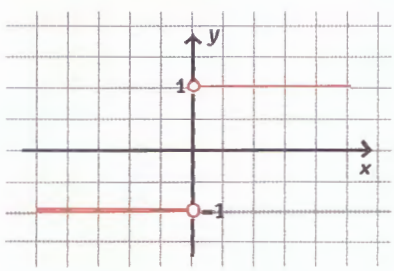
.....

c) Los ceros, si existen. .....

.....

La función signo

Para leer y recordar



- Llamamos *función signo* a la función cuya fórmula es $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Podemos observar que si $x > 0$, entonces $y = 1$ y si $x < 0$, entonces $y = -1$.

- El dominio de la función signo es $\mathbb{R} - \{0\}$, y su imagen es $\{-1, 1\}$.

40 Escriban una fórmula que defina la función signo en dos tramos lineales.

.....

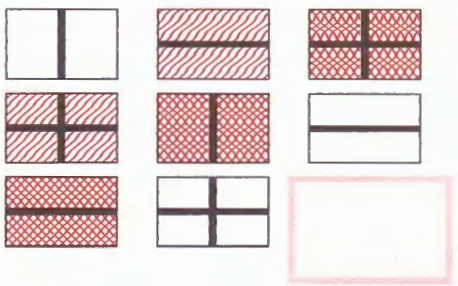
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las sucesiones numéricas

41 Las siguientes figuras forman parte del test de matrices progresivas de J. C. Raven. Completen colocando en cada casillero el dibujo que falta.

a)

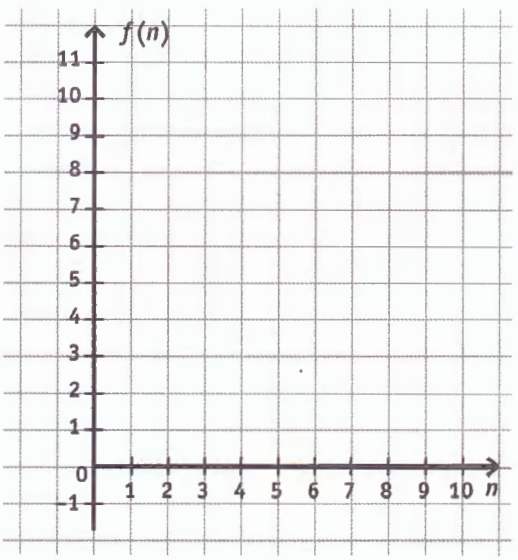
b)



42 En la tabla siguiente, se muestran algunos pares ordenados de una función cuyo dominio son los números naturales.

a) Completen la tabla y grafiquen la función.

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
4	
5	



b) Completen las siguientes frases.

I. Si consideramos el elemento del dominio $n = 6$, su imagen es .....

II. $f(n) = 14$ es imagen de $n =$ .....

III. La fórmula de esta función es .....

c) Contesten a las preguntas.

I. ¿Cuál es el conjunto imagen de esta función?.....

II. ¿Es correcto trazar una línea que una los puntos de la gráfica? ¿Por qué? .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para leer y recordar

- Una *sucesión numérica* es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales o un subconjunto de este y cuya imagen está incluida en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
- Cuando trabajamos con sucesiones, hay que prestar especial atención al *número de orden n* que le corresponde a cada una de las imágenes, y a estas las llamamos *términos* de la sucesión.
- Los términos de una sucesión siguen una "regularidad" o "ley" que la caracteriza, y, en muchos casos, se expresa algebraicamente mediante una fórmula llamada *término general* o *término enésimo* de la sucesión.

Observen en el siguiente ejemplo la notación que utilizamos para trabajar con sucesiones.
Consideremos la sucesión de término general $a_n = 3n + 2$.

Lugar que ocupa	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...	n
Término	$a_1 = 3 \cdot 1 + 2$ $a_1 = 5$	$a_2 = 3 \cdot 2 + 2$ $a_2 = 8$	$a_3 = 3 \cdot 3 + 2$ $a_3 = 11$	...	$a_n = 3 \cdot n + 2$

43 Dados los términos generales de cuatro sucesiones numéricas, hallen, para cada una, los seis primeros términos y la suma de estos.

a_n	$\frac{n}{n+1}$	$3n + 1$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$(-1)^n \cdot n$
a_1				
a_2				
a_3				
a_4				
a_5				
a_6				
S_6				

44 Encuentren una expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones.

a) 1; 3; 5; 7; 9... $a_n =$

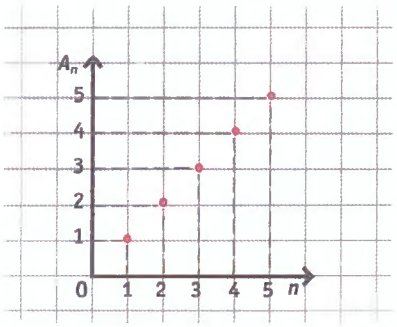
b) −1; 2; −3; 4; −5... $a_n =$

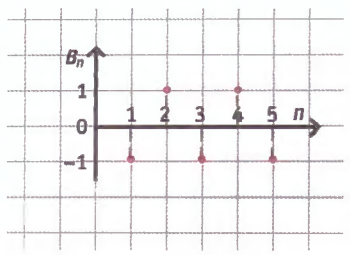
c) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}$... $a_n =$

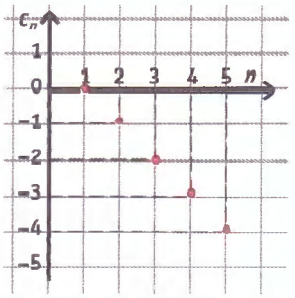
d) $2; \frac{1}{2}; \frac{2}{9}; \frac{1}{8}; \frac{2}{25}$... $a_n =$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

45 Observen los gráficos de tres sucesiones numéricas.







a) Completen la tabla.

n	1	2	3	4	5
A_n	$a_1 = 1$	$a_2 =$			
B_n					$b_5 = -1$
C_n					

b) Indiquen cuál de las siguientes fórmulas corresponde al término general de cada una de las sucesiones.

I. $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ -1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$ II. $a_n = 1 - n$ III. $a_n = \frac{1}{n}$ IV. $a_n = n$ V. $a_n = (-1)^n$

46 Sin escribir los términos, indiquen cuáles de los siguientes términos generales están asociados a dos sucesiones iguales. Justifiquen.

a) $a_n = 3 \cdot (n - 1)$ **b)** $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - n\right)$ **c)** $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1} + 2n$ **d)** $a_n = 3n - 1$

.....

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Progresiones aritméticas

47 Observen las siguientes sucesiones numéricas.

I. 3; 6; 9; ...; ... **II.** 1; 3; 5; ...; ... **III.** 5; 8; 11; ...; ...

a) Encuentren la regularidad con la que fue armada cada sucesión numérica y escriban los dos términos que continúan en cada una.

b) Completen las tablas siguientes.

I.

n	a_n
1	3
2	6
3	9
4	
5	
n	

II.

n	a_n
1	1
2	3
3	5
4	
5	
n	

III.

n	a_n
1	5
2	8
3	11
4	
5	
n	

c) Construyan en sus carpetas un gráfico cartesiano con los puntos de la tabla, para cada sucesión. ¿Qué particularidad observan?

.....

d) Si conocen solamente el primero y el quinto término de una secuencia similar a las anteriores, ¿cómo podrían hallar el noveno término? ¿Y el vigésimo? Validen su respuesta a partir de las tablas del ítem **b)** .

.....

.....

Para leer y recordar

- Una *progresión aritmética* es una sucesión numérica en la cual cada término se obtiene sumando un valor constante, llamado *diferencia,* al término anterior.

$a_2 = a_1 + d \longrightarrow a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2 \cdot d \longrightarrow a_3 = a_1 + 2 \cdot d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2 \cdot d + d = a_1 + 3 \cdot d \longrightarrow a_4 = a_1 + 3 \cdot d$

$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d} \longrightarrow$ *Fórmula del término general de una progresión aritmética.*

- Toda función lineal puede asociarse a una progresión aritmética, y viceversa.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

48 Despejen cada una de las variables en la fórmula del término general, y completen.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d$ $\quad d =$ $\quad n =$

49 Si $a_1 = 3$ y $a_3 = 7$ son los términos de una sucesión aritmética, hallen d, a_9 y a_{25}.

.....

50 Si $a_2 = \frac{79}{2}$ y $a_3 = -39$ son los términos de una sucesión aritmética, hallen d, a_{10} y a_{15}.

.....

51 Sobre la base de la información dada, analicen si cada una de las siguientes sucesiones es o no una progresión aritmética. Para las que lo sean, calculen su diferencia y escriban la fórmula del término general.

a) 9; 13; 17; 21; 25...

.....

b) 6; 11; 18; 27; 38...

.....

c) 1; 3; 9; 27; 81...

.....

d) −9; −5; −1; 3; 7...

.....

52 Los datos que se dan como *hipótesis* corresponden a sucesiones aritméticas. Analicen si en cada caso la *tesis* es verdadera o falsa.

hipótesis — tesis

a) Si $a_1 = 3$ y $a_{12} = -8$, entonces $d = -1$.

b) Si $a_3 = \frac{1}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$, entonces $a_1 = -\frac{1}{2}$.

c) Si $a_{11} = 1$, entonces $a_{15} = 1 + 4d$.

d) Si $a_n = 37$, $a_8 = -41$ y $d = 13$, entonces $n = 14$.

e) Si en una sucesión $a_2 = 7$ y $a_{10} = 31$, y en otra sucesión, $b_5 = 1$ y $b_7 = 7$, entonces ambas tienen la misma diferencia.

© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

La suma de los primeros *n* términos de una sucesión aritmética

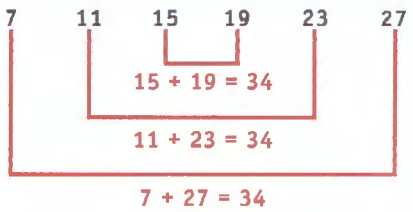
Para observar

Consideremos una sucesión aritmética cuyos seis primeros términos son:

$$7;\ 11;\ 15;\ 19;\ 23;\ 27$$

Podemos calcular la suma de estos términos así:

$$S_6 = (7 + 27) \cdot \frac{6}{2} \Rightarrow S_6 = 102$$



Para sumar los primeros *n* términos de cualquier sucesión aritmética, podemos aplicar la siguiente fórmula: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$

53 Calculen la suma de los primeros 40 números naturales.

.....

54 Hallen la suma de los múltiplos de 5 que sean mayores que 42 y menores que 158.

.....

55 ¿Cuántos múltiplos de 9 se encuentran entre 1000 y 3000?

.....

56 El segundo y el tercer término de una sucesión aritmética son, respectivamente, 7 y $-\frac{3}{2}$. Calculen la suma de los primeros 10 términos.

57 Calculen cuántos años bisiestos hay entre los años 1999 y 2095.

.....

58 Tres números ocupan lugares consecutivos en una sucesión aritmética de diferencia 3. El cociente entre el primero de ellos y el tercero es $\frac{7}{9}$.

a) Hallen el término menor.

b) Hallen la suma de los tres términos.

c) ¿Cuál deberá ser el cociente entre el primero de ellos y el tercero, para que, con la misma diferencia, el menor término sea el opuesto del encontrado en a) ?

59 Al contar desde arriba una pila de latas, hay 6 en la primera fila, 7 en la segunda, y así sucesivamente hasta la fila número 25. ¿Cuántas latas hay en total?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Modelos de crecimiento aritmético

60 Una empresa quiere construir un hotel en una zona serrana.
El primer inconveniente que por las características del suelo tienen que solucionar es la dificultad para el abastecimiento de agua. Estudios hechos por una empresa excavadora aseguran que el agua se halla entre los 25 y los 40 metros de profundidad.
Los costos que se estiman son de $2000 por los primeros 10 metros de excavación y $200 más por cada metro siguiente hasta que el agua aparezca.
¿Entre qué valores variarán los costos para concretar el trabajo?

61 Para juntar fondos para su viaje de egresados, un grupo de alumnos de 4.° año decidió ahorrar dinero todos los días de agosto. El primer día, cada uno depositó cincuenta centavos; el segundo día, un peso; el tercer día, $1,50, y así sucesivamente hasta terminar el mes.

a) ¿Cuánto dinero depositó cada uno en total?

b) ¿Cuánto dinero depositó cada uno en los últimos diez días del mes?

c) Carlos, que era el que guardaba el dinero y llevaba las cuentas, a fin de mes se ocupó de reclamarle a cada uno lo que debía. A Claudia le dijo que no había hecho el depósito correspondiente al día 15. ¿Cuánto debía Claudia?

d) A Gisela, Carlos le dijo: "En tu cuenta hay $237; y sé que falta el depósito de un día, pero no tengo anotado de cuál". Calculen a qué día correspondía el depósito que faltaba en la suma de Gisela.

62 En un programa televisivo de entretenimientos, se pone en marcha el juego "Gane y Lea".
El concurso consiste en adivinar cuántos libros hay colocados en una biblioteca que se muestra, a tal efecto, en pantalla. El juego, que es telefónico, comienza con una base de $1000, y por cada respuesta incorrecta se agregan al pozo $500.
El ganador se lleva el pozo acumulado más la biblioteca con todos esos libros. Cada llamada telefónica cuesta $0,60 el minuto y tiene una duración media de cinco minutos.
El dinero recaudado por la empresa telefónica es donado a una institución para la compra de libros.
Respondan a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto dinero gana una persona que acierta en la llamada 25?

b) Una persona llama, responde bien y gana $100 000. ¿Qué número de llamada es?

c) Si el participante gana $100 000, ¿cuánto dinero tiene que donar la empresa telefónica para la compra de libros?

d) El primer sábado de cada mes, el juego tiene un formato especial: comienza con el mismo pozo, pero varía la suma que se agrega en los sucesivos llamados hasta que alguien gana. Si una persona ganó $58 000 en la llamada 191, ¿cuánto dinero se adicionó al pozo por cada respuesta incorrecta?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Progresiones e inversiones

Uno de los conceptos más usados en el ámbito de las finanzas y que, a su vez, se aplica en la vida cotidiana es el *interés simple.*
Si una persona invierte sus ahorros a una determinada *tasa* de interés simple por un período determinado, recibe como interés el resultado de multiplicar la tasa de interés por el *capital* invertido.
Si transcurrido el primer mes no retira la inversión, el capital continuará produciendo el mismo interés, por cada período que deje el dinero depositado.
Después de varios períodos, el inversionista recuperará el capital inicial más los intereses ganados. Esto constituye el *monto.*
Los montos obtenidos al finalizar cada período constituyen una *progresión aritmética.*

63 Completen las siguientes oraciones.

I. Si se depositan \$100 durante 7 meses al 5% de interés simple mensual, el monto obtenido es M_7 = ...

II. Si los \$100 se depositan durante n meses, la fórmula que sirve para calcular el monto obtenido es M_n = ...

III. El mismo dinero depositado durante 20 meses en las condiciones dadas produce un monto de M_{20} = ...

IV. Si se depositan \$100 durante 11 meses, al 3% mensual, se obtiene un monto de M_{11} = ...

V. Si se depositan \$100 durante n meses, con un interés simple mensual i %, el monto se puede calcular con la expresión M_n = ...

VI. Un capital inicial C_0 depositado durante n meses con una tasa de interés simple mensual i produce un monto que se calcula mediante la fórmula .....

64 Calculen.

a) ¿Qué monto produjo un capital de \$12 500 que se colocó durante 4 meses a un interés simple del 2% mensual?

b) ¿Cuál era el capital que, en 6 meses, colocado al 18% de interés simple anual, produjo un monto de \$5232?

c) ¿En cuánto tiempo, un capital de \$600 produce un monto de \$696 al 2% mensual?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones lineales y zoología

Entre los ciervos de América del Sur, el ciervo de los pantanos es el de mayor tamaño, ya que su altura, del lomo al suelo, oscila entre 1,10 m y 1,20 m. Su pelaje es de color rojizo en el verano, pero en época invernal cambia a un tono más pardo. Alrededor de los ojos, tiene círculos de pelaje blanco que lo caracterizan. Presenta una cornamenta, por lo general muy desarrollada, con un ancho de unos 60 cm, y que, lamentablemente, es un preciado trofeo para el enemigo que pone en riesgo a su especie: el cazador furtivo.

65 Un estudiante de Veterinaria, preocupado por la protección de las especies en peligro de extinción, encuentra en un libro una fórmula que relaciona, con cierta aproximación, el peso promedio P (en kilogramos) de la cornamenta de un ciervo con la edad E (en meses) del ciervo.

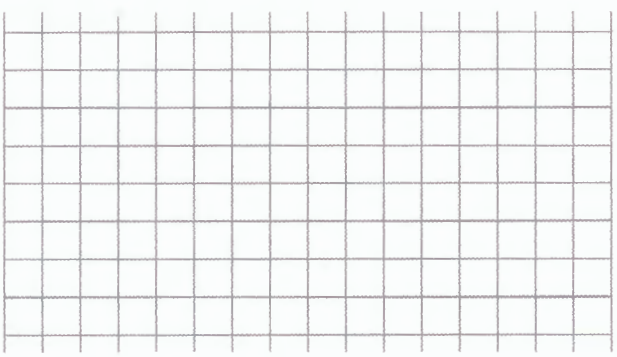
$P(E) = m\,E + b$

Luego de analizar algunos ejemplares de la misma especie, registra que los ciervos de 70 meses suelen tener una cornamenta de medio kilo, y que el peso de esta suele aumentar 70 gramos cada 8 meses.

a) Si la especie analizada responde a la fórmula anterior, ¿cuáles son los valores de m y de b?

.....

b) Representen gráficamente la función P(E).



c) ¿A qué edad, la cornamenta de un ciervo alcanza un peso de alrededor de 150 gramos?

.....

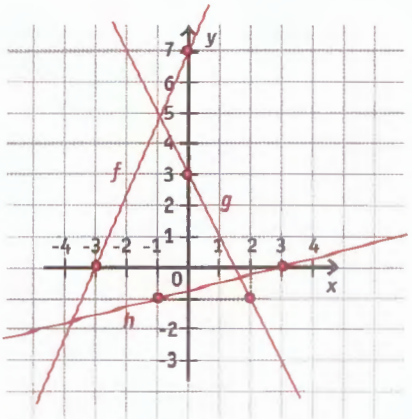
d) Si la vida media de un ciervo es de 8 años, ¿cuánto pesaría, aproximadamente, su cornamenta al final de su vida?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

66 Hallen las fórmulas de las funciones lineales representadas en el gráfico.



67 Hallen la fórmula de la función lineal cuyas características se describen en cada caso.

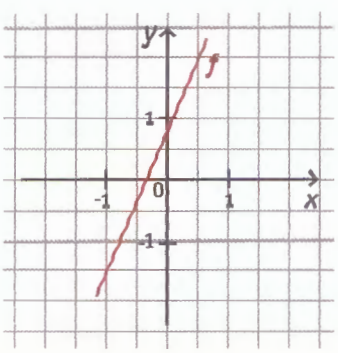
a) $f(2) = 5$ y $f(-3) = 4$

b) $m = -\frac{1}{2}$; $f(0) = -2$

c) Tiene ordenada al origen $y = 4$, y su cero es $x = 3$.

d) Tiene ordenada al origen $y = 2$, y forma un ángulo de 45° con el semieje positivo de las abscisas.

68 Utilicen los datos del siguiente gráfico cartesiano para establecer el valor exacto de $f(4)$.



69 Escriban las ecuaciones de cuatro rectas que al cortarse determinen un rectángulo de área 8.

70 Observen las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2:

$$L_1: y = 2x + 3$$
$$L_2: y = -3x + 2$$

Indiquen las ecuaciones de otras dos rectas tales que, al cortarse con las anteriores, determinen la figura que se indica, en cada caso.

a) Un paralelogramo.

b) Un rombo.

c) Un trapecio.

71 Como parte de un entrenamiento, una persona caminó, cada día de septiembre, tres cuadras más que el día anterior.

a) El 8 de septiembre recorrió 31 cuadras. ¿Cuántas cuadras caminó el último día de septiembre?

b) ¿Cuántas cuadras caminó durante todo el mes?

c) ¿Qué día caminó 43 cuadras?

72 A una temperatura de 1°C, la velocidad del sonido en el aire es de 332,1 m/seg aproximadamente. Esta velocidad se incrementa en alrededor de 0,6 m/seg por cada °C que aumenta la temperatura.

a) Calculen la velocidad del sonido si la temperatura es de 10 °C.

b) ¿A qué temperatura, la velocidad del sonido es de 346,5 m/seg?

73 Las siguientes funciones se obtuvieron como transformaciones de $g(x) = |x|$.

a) Grafíquenlas.

I. $f(x) = |x| + 1$

II. $f(x) = |x - 2|$

III. $f(x) = 2 - |x|$

IV. $f(x) = |x + 3| - 1$

b) Calculen los ceros, si los hay, de cada una de las funciones que graficaron.

74 Si $f(x) = [x]$, completen la siguientes igualdades.

a) $f(0)$

b) $f(1)$

c) $f(0,5)$

d) $f(1,2)$

e) $f(-1)$

f) $f(-0,9)$

g) $f(-1,1)$

h) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

75 Resuelvan las siguientes consignas.

a) Grafiquen las funciones $f(x) = |x+1|$ y $g(x) = 2$ definidas en su dominio natural.

b) Hallen los puntos del plano en los cuales $f(x) = g(x)$.

c) Indiquen en la gráfica los intervalos del dominio en los cuales $f(x) > g(x)$.

d) Comprueben analíticamente los resultados obtenidos.

76 Hallen la suma de los números impares que se encuentran entre 200 y 300.

77 Resuelvan el "acertijo funcional" que aparece a continuación.

a) Escriban una fórmula de una función lineal cualquiera.

b) Grafíquenla.

c) Elijan un número. Súmenlo a cada coeficiente (m y b) de la fórmula que escribieron. Por ejemplo, si escribieron $y = 2x + 4$ y eligieron el 3, ahora les quedará: $y = (2 + 3)x + (4 + 3)$.

d) Grafiquen la segunda recta en el mismo gráfico que la anterior.

e) Hallen el punto donde se cortan.

Sin saber cuál fue la recta que eligieron, afirmamos que: "El punto donde se intersecan las dos rectas que dibujaron, tiene abscisa –1".

f) Analicen por qué "acertamos" con esta afirmación, sin conocer su función inicial.

78 Escriban cada una de las siguientes funciones como composición de la función de fórmula $f(x) = |x|$ y una función lineal.

a) $s(x) = |x| + 1$

b) $l(x) = |x - 2|$

c) $h(x) = 2 - |x|$

d) $m(x) = |2x|$

e) $j(x) = 2|x|$

f) $t(x) = 3|x| - 1$

79 Los lados de un triángulo rectángulo forman una sucesión aritmética, y la suma de la hipotenusa con el cateto menor es 24 cm. Calculen la superficie del triángulo.

80 En una sucesión aritmética, el primer término es 5 y el séptimo es 29. Encuentren la suma de los 10 primeros términos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

81 Una función de demanda es aquella que relaciona el precio de un producto con la cantidad demandada.
Sobre la base de estudios de mercado, una consultora determina que la demanda de un nuevo cereal se puede describir con la función $c(p) = (p - 10) \cdot (-0{,}45)$, donde p es el precio de una caja en $ y c son las toneladas de cereal que se demandarían a ese precio.

a) Construyan la gráfica de la función $c(p)$.

b) Indiquen el dominio y la imagen de $c(p)$ en el contexto de este problema.

82 Sin escribir las ecuaciones, indiquen si las rectas M y N son perpendiculares. Utilicen la siguiente información:
Ambas se intersecan en (2; 3). M contiene al origen de coordenadas y N, al punto (5;1). Expliquen cómo lo hicieron.

83 El triángulo ABC está determinado por los puntos:
A = (–2; 6), B = (0; 7) y C = (–6; 0).

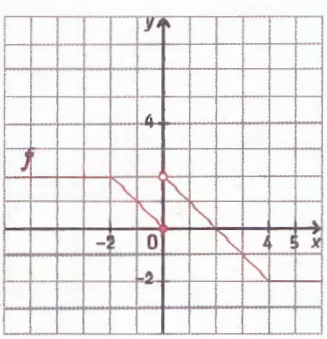
a) Construyan el triángulo ABC en un par de ejes cartesianos.

b) Escriban la ecuación de cada una de las rectas que contienen a sus lados.

c) Clasifiquen el triángulo según los ángulos.

d) Clasifiquen el triángulo según los lados.

84 Escriban la fórmula de la función f.



85 Hallen la fórmula de la función inversa de cada una de las funciones lineales que se dan a continuación.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / g(x) = 4 - 6x$

c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / h(x) = \frac{3x - 5}{4}$

86 Encuentren siete términos entre 4 y 44 si se sabe que forman una progresión aritmética.

87 Para fabricar una pieza de automóvil, se tiene un costo fijo mensual de $3500, debido a sueldos y a gastos de mantenimiento de maquinarias. Además, el material para cada pieza cuesta $10. La pieza se vende a los mayoristas a un precio unitario de $15. En los meses anteriores, no se pudieron ubicar en el mercado más de 1200 piezas mensuales, y se decidió no fabricar más de esa cantidad desde entonces.

a) Busquen una expresión para las funciones costo $c(x)$ e ingreso $i(x)$ durante el mes, en función de la cantidad x de piezas fabricadas o vendidas.

b) ¿Cuál es el dominio de las funciones que obtuvieron?

c) Si la cantidad de piezas vendidas es igual a la cantidad de piezas fabricadas, la función beneficio $b(x)$ se obtiene calculando la diferencia entre ingresos y costos. Hallen una fórmula para expresar el beneficio en función de las unidades vendidas.

d) Hallen los ceros, los conjuntos de positividad y de negatividad de la función beneficio y analicen qué significado tienen para el fabricante.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 Los números 2, 3 y 4 son los primeros términos de una sucesión cuyo término general es:

- a) $a_n = n^2 + 1$
- b) $a_n = \frac{n^2 + n}{n}$
- c) $a_n = n^2 - 1$
- d) $a_n = \frac{2n + 1}{n}$

2 En una sucesión aritmética, la suma del cuarto y el séptimo término es 47 y la diferencia entre el décimo y el sexto es 20. Entonces:

- a) El tercer término es 12.
- b) La función lineal asociada tiene ordenada al origen 6.
- c) Los puntos que representan a la sucesión en un sistema cartesiano están alineados según una recta de pendiente 1.
- d) La suma de los cinco primeros términos es 55.

3 Si $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x + 3$, entonces:

- a) $(f \circ g)(-1) = 5$
- b) (4; 7) pertenece a ambas gráficas.
- c) las rectas asociadas a f y a g son perpendiculares.
- d) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x - 1$

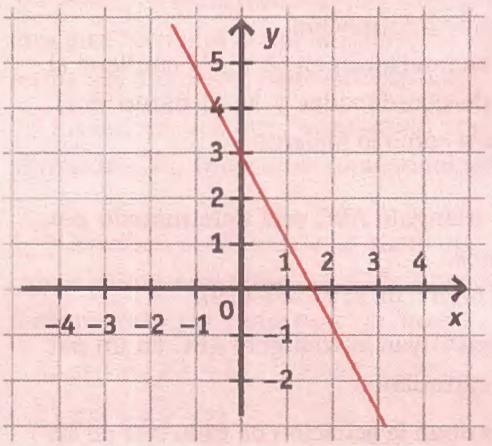
4 De la función de fórmula $f(x) = |x - 1| + 2$ se puede afirmar que:

- a) $C^0 = \emptyset$
- b) $C^+ = (1; +\infty)$
- c) Es creciente en $(-\infty; 1)$.
- d) Su conjunto imagen es $(3; +\infty)$.

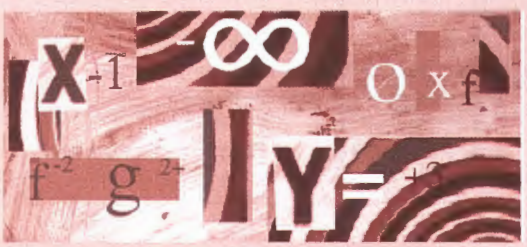
5 De la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / y = -3x + 2$ se puede afirmar que:

- a) Por cada unidad que aumenta la abscisa, la ordenada disminuye 2.
- b) Contiene al punto (0; –2).
- c) Es positiva en $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.
- d) Ninguna de las anteriores.

6 La recta que se graficó en el siguiente plano cartesiano:



- a) Tiene pendiente 2.
- b) Contiene a todos los puntos de coordenadas $(x; -2x + 3)$.
- c) Representa una función creciente.
- d) Representa una función negativa en $[1{,}5; +\infty)$.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

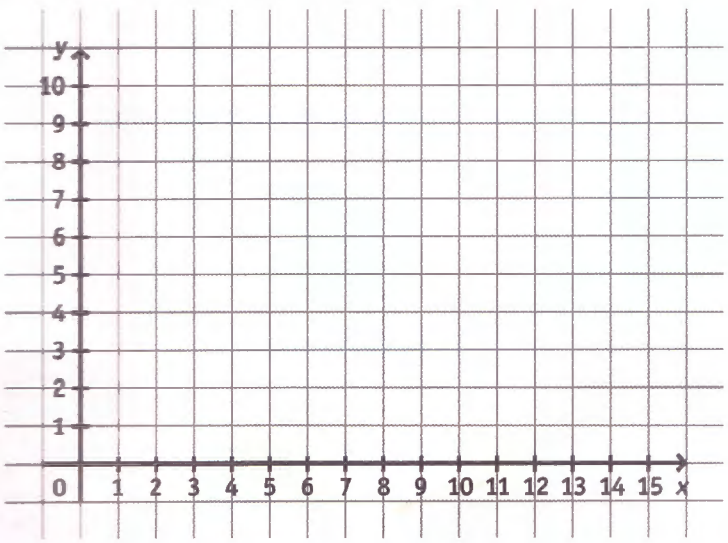
Las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 determinan, al cortarse, el cuadrilátero ABCD. Las ecuaciones de esas rectas son las siguientes.

L_1: $2y + 3x = 18$ L_2: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$ L_3: $3y = 1 + 2x$ L_4: $2y = -3x + 5$

1 Sin realizar ninguna construcción, indiquen qué clase de cuadrilátero es el ABCD. Justifiquen su respuesta.

.....

2 Tracen las cuatro rectas en un par de ejes cartesianos y anoten las coordenadas de los vértices del cuadrilátero.



3 Hallen las ecuaciones de las rectas que incluyen a las diagonales del cuadrilátero ABCD y analicen las funciones lineales asociadas a cada una.

.....

.....

4 Observen el gráfico cartesiano con las cuatro rectas y, sin realizar ninguna medición:

a) Calculen el perímetro exacto del cuadrilátero ABCD. .....

b) Indiquen a qué conjunto numérico pertenece el valor anterior. .....

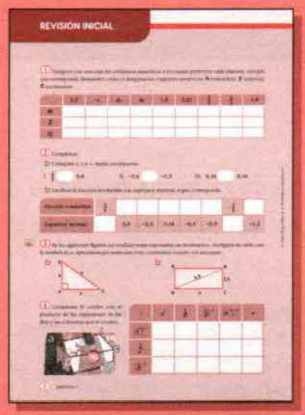
c) Aproximen el perímetro por redondeo a los centésimos. .....

d) Hallen el error porcentual cometido en la aproximación. .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

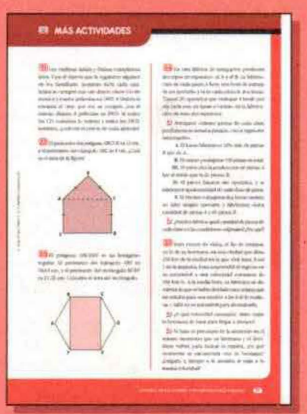
Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una presentación general del tema es el eje que abre cada capítulo.

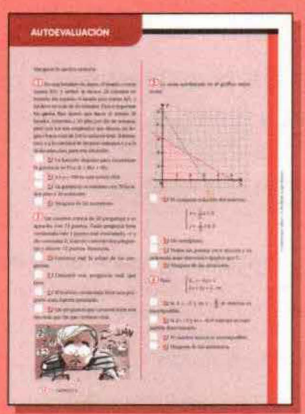


Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

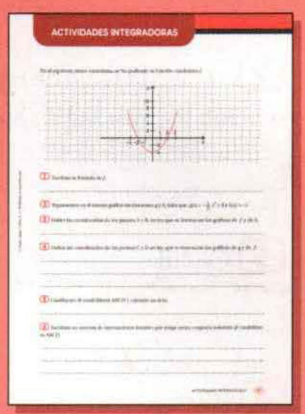
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados con aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



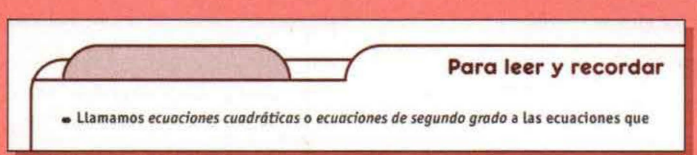
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



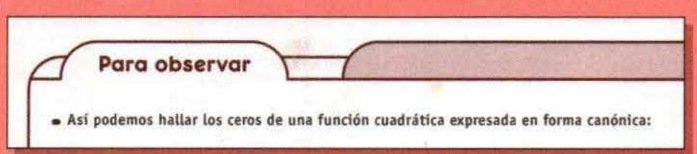
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 3 y 4, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE